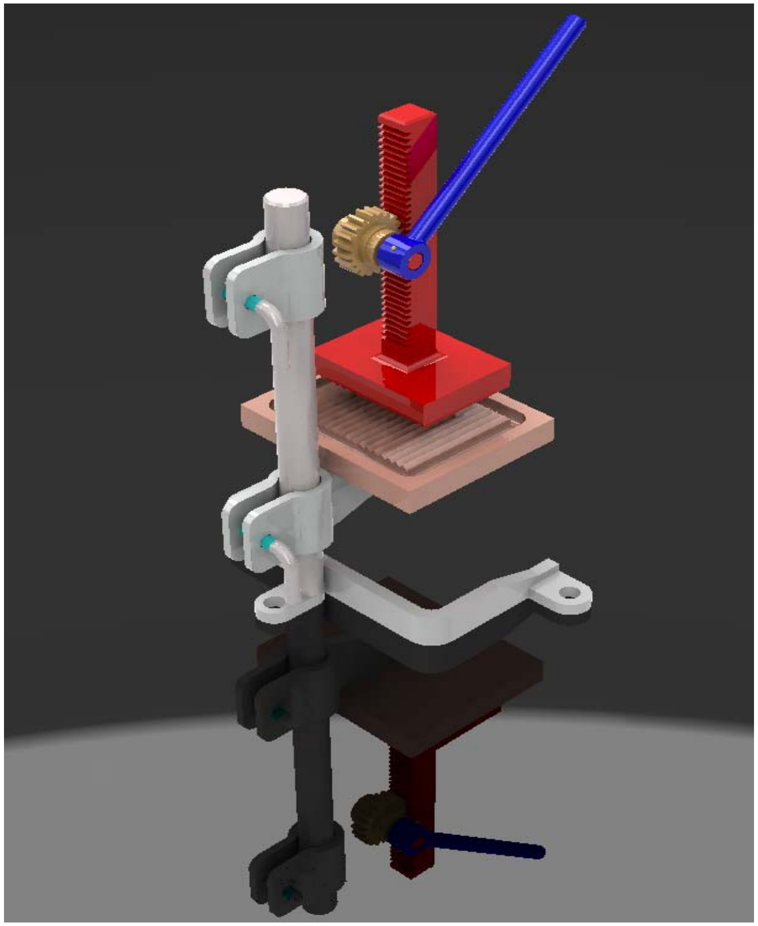
دینامیك ماشین



گروه مکانیک

دانشکده مهندسی

دانشگاه فردوسی مشهد

Ferdowsi University of Mashad

سرفصل درس

- فصل ۱ تعاریف و مفاهیم اصلی
- فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت
- فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها
- فصل ۴ مراکز آنی
- فصل ۵ سرعت در مکانیزمها
- فصل ۶ شتاب در مکانیزمها
- فصل ۷ تحلیل ریاضی مکانیزمها
- فصل ۸ طراحی بادامک ها
- فصل ۹ چرخدنده و مجموعه چرخدنده ها
- فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها
- فصل ۱۱ فلایویل
- فصل ۱۲ نیروهای تکان دهنده وبالانس کردن

فصل 1   تعاریف و مفاهیم اصلی

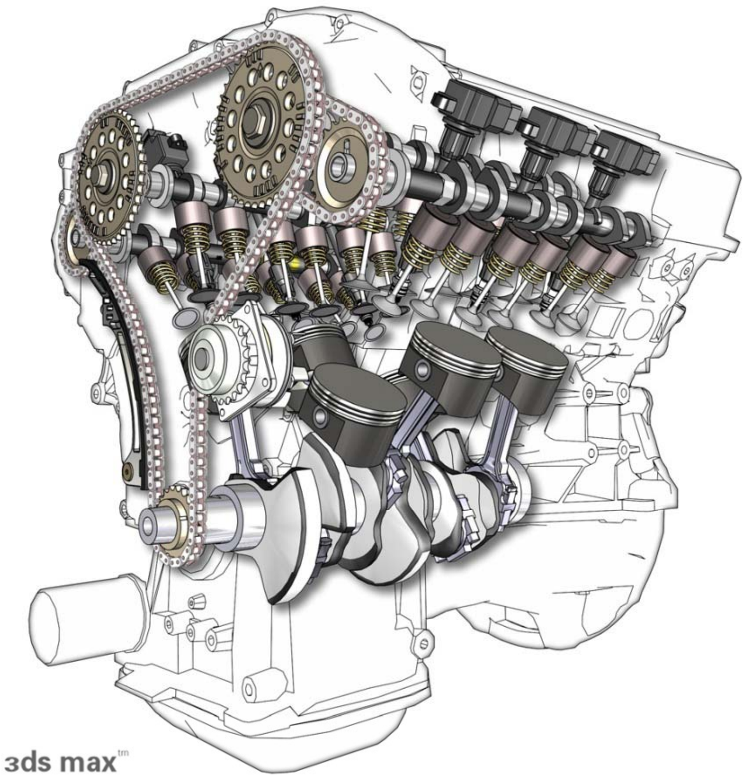
- **سینماتیک**: بررسی حرکت نسبی اجزاء ماشین، تحلیل تغییر مکان، سرعت وشتاب

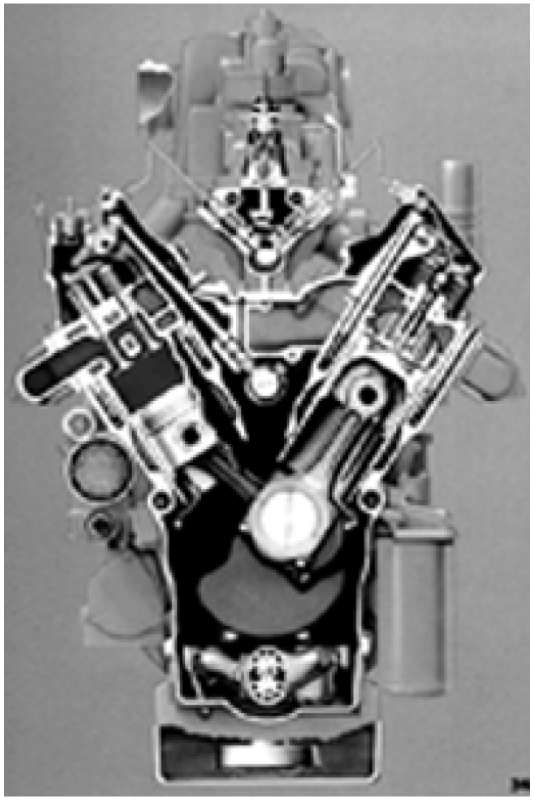
- **سینتیک**: تحلیل نیروهای مؤثر روی اجزاء و حرکت ناشی از آن

- **مکانیزم**: وسیله ای برای تبدیل حرکت به الگوهای مورد نظر و معمولا همراه با نیرو کم و مصرف توان کم

- **ماشین**: معمولا در برگیرندهء مکانیزمهایی است که نیروهای قابل توجهی تولید کرده و توان قابل توجهی انتقال می دهند.

- **دیاگرام سینماتیکی**: هنگام بررسی حرکت اجزاء ماشین معمول است که ساختار کلی رسم شود و تنها ابعادی که در حرکت موثرند در نظرگرفته شوند.

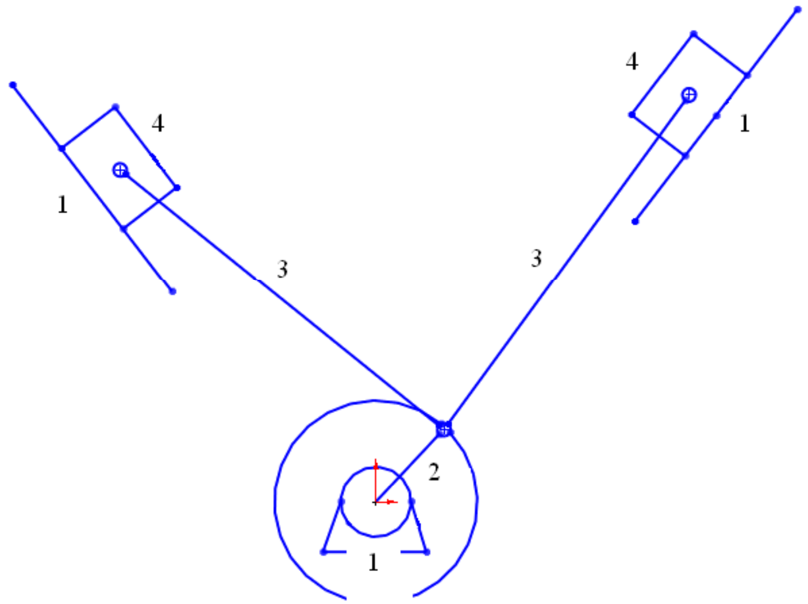




فصل 1   تعاریف و مفاهیم اصلی

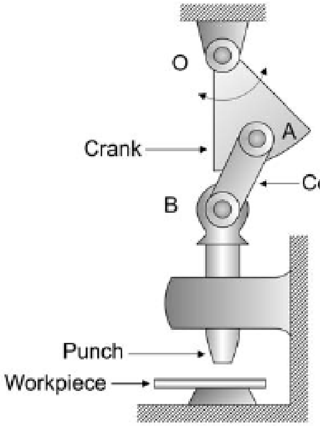
- 1: یاتاقانهای میل لنگ و استوانه سیلندر
- 2: لنگ میل لنگ
- 3: شاتون
- 4: پیستون

زمین: امکان حرکت اجزاء متحرک
را فراهم می کند
دردیاگرام ابعاد موثر نشان داده می شود
دیاگرام را می توان با مقیاس رسم نمود

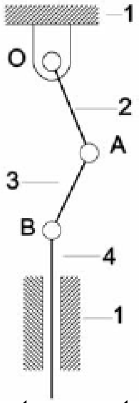


دیاگرام سینماتیکی

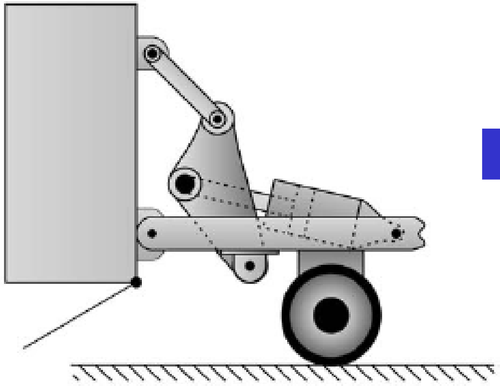
- چند مثال دیگر



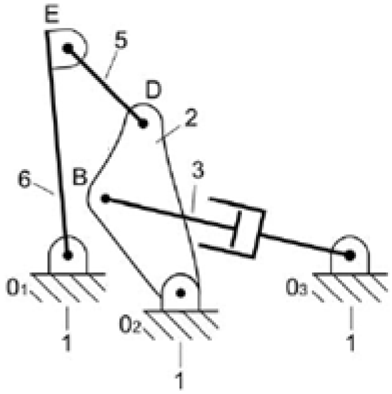
پرس مکانیکی



دیاگرام سینماتیکی



Dump Truck



دیاگرام سینماتیکی

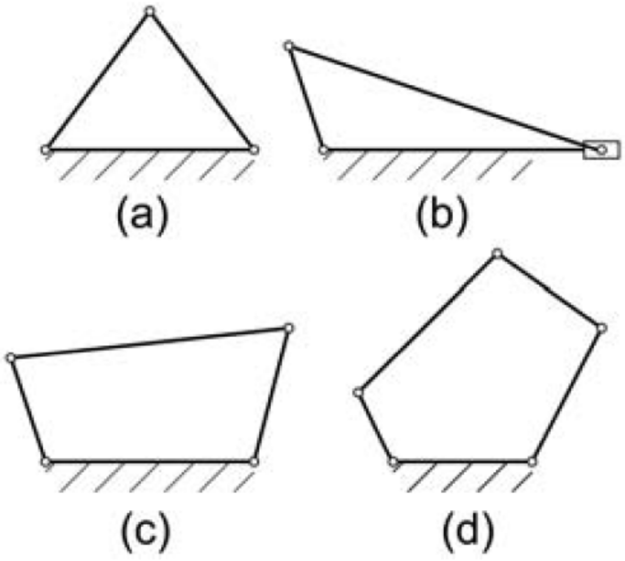
فصل 1   تعاریف و مفاهیم اصلی

- **قابلیت انعطاف** (Elasticity)
  - تمامی مواد مقداری قابلیت انعطاف دارند

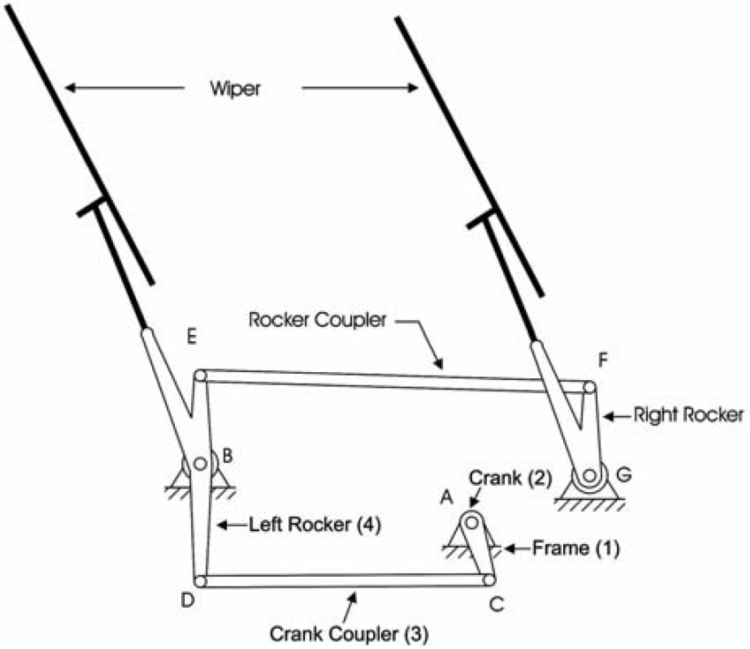
- **بازوی صلب** (Rigid Link)
  - بازوئی که می توان از تغییر شکل آن هنگام تعیین حرکت سایر اجزاء صرف نظر نمود.
- **تسمه یا زنجیر**
  - یک اتصال یا بازوی قابل ارتجاء کششی است.

- مکانیزم (Mechanism)
  - زنجیره سینماتیکی(*kinematic chain*): یک سیستم از بازوها می باشد که به صورت اجسام صلب بهم متصل شده یا در تماس با یک دیگر می باشد.
  - زنجیره سینماتیکی مقید: اگر یکی از بازوها ثابت در نظر گرفته شده و حرکت هریک از بازو های دیگر موجب شود که سایر بازوها به مکان معین و قابل پیش بینی حرکت نمایند، آنگاه مجموعه زنجیره سینماتیکی مقید نامیده می شود.
  - زنجیره سینماتیکی نامقید: اگر یکی از بازوها ثابت در نظر گرفته شده و حرکت هریک از بازو های دیگر موجب شود که سایر بازوها حرکت نامعین و غیرقابل پیش بینی داشته باشند، آنگاه ه زنجیره سینماتیکی نامقید نامیده می شود.
  - زنجیره سینماتیکی مقید **مکانیزم** نامیده می شود.

• مثالهائی از زنجیره سینماتیکی مقید و نامقید

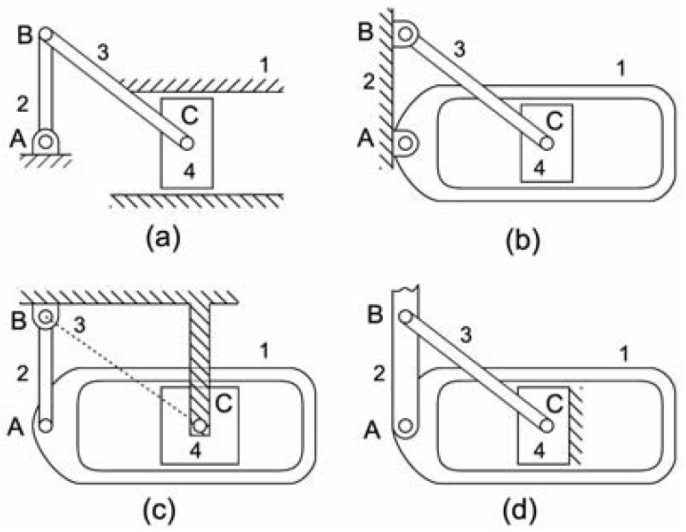


a- sturcture
b- crank and slider mechnaism
c- four bar mechanism
d- ?



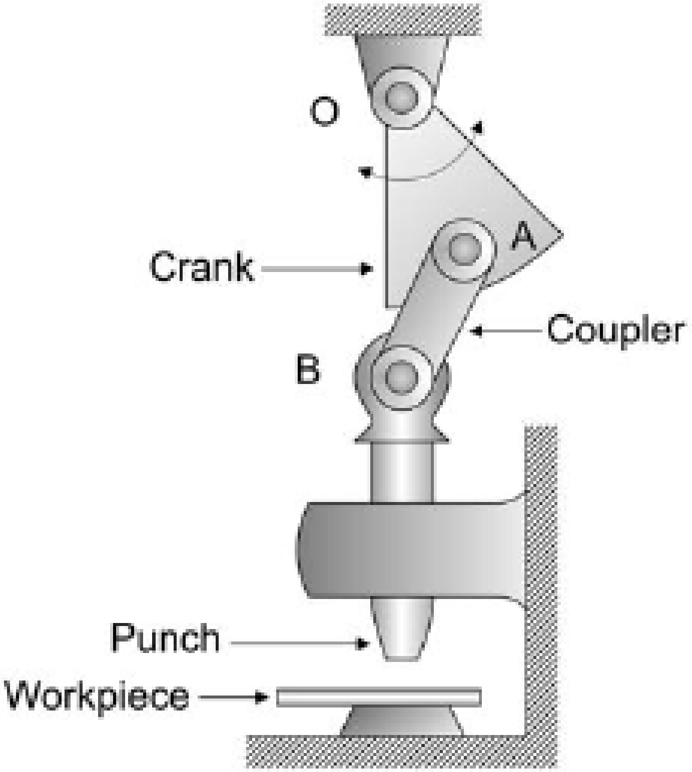
windshield wiper mechanism

- معکوس (Inversion)
  - با انتخاب اینکه کدام بازو در زنجیره سینماتیکی زمین یا ثابت باشد می توان مکانیزمهای متفاوتی بدست آورد.



Four inversions of the slider-crank chain:
(a) an internal combustion engine,
(b) rotary engine used in early aircraft, quick-return mechanism,
(c) steam engine, crankshaper mechanism,
(d) farm hand pump.

- حرکت صفحه ای (Planar Motion)
  - صفحه حرکت plane of motion
  - حرکت صفحه ای
    - انتقالی translational
      - یک جسم صلب حرکت انتقالی دارد اگر تمامی خطوط مستقیم در جسم به موازات خود حرکت نمایند.
        Rectilinear translation
        Curvilinear translation



    - دورانی rotational
      - تمامی نقاط جسم حول یک نقطه دوران می نمایند.
    - ترکیب این دو
      - حرکت توام دورانی انتقالی

تمرین

1- با استفاده از مراجع مختلف تعاریف Analysis و Synthesis را بررسی نمایید.

2- با رسم شکل و دیاگرام سینماتیکی مکانیزمهای زیر را بررسی نمایید:

- برف پاک کن خودرو
- جک خودرو

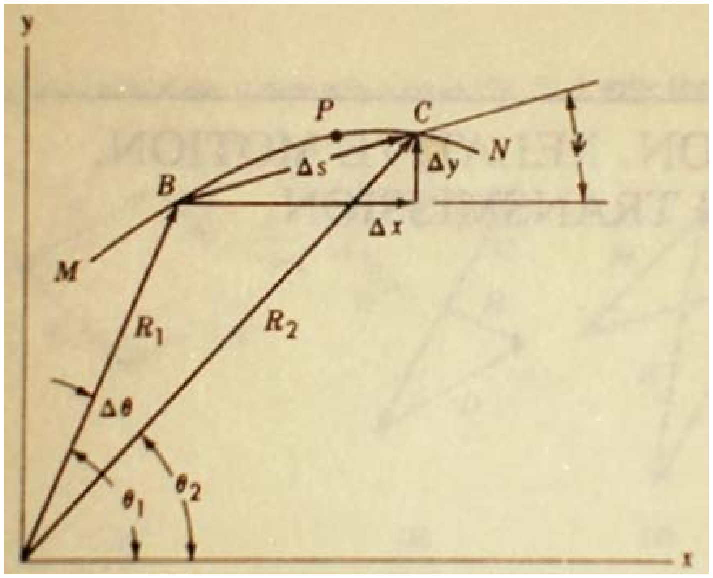
3- با استفاده از نرم افزارهای شبیه ساز حرکت، چهار معکوس لغزنده و لنگ را با ورودی های مختلف متحرک سازی (animate) نمایید.

فصل دوم

خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

Re-inventing the wheel

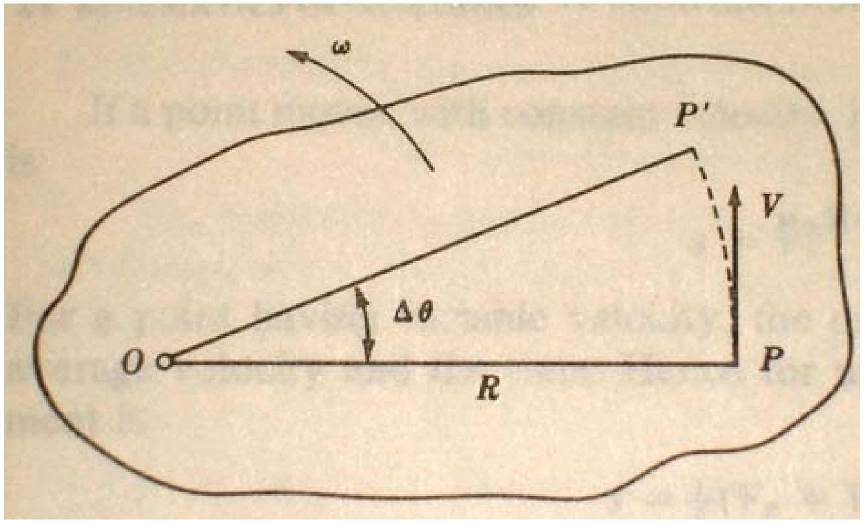
- حرکت یک جسم صلب برحسب حرکت یک یا چند نقطه آن قابل بیان است بنابراین ابتدا حرکت نقطه ای مطالعه می گردد.
- مسیر و طول حرکت
  - مکان هندسی موقعیت متوالی یک نقطه متحرک مسیر نامیده می شود.
  - فاصله طی شده توسط نقطه در امتداد مسیر طول حرکت یا فاصله نامیده میشود که کمیتی اسکالر است.
- تغییر مکان و سرعت خطی
  - تغییر مکان یک نقطه تغییر موقعیت آن است و یک کمیت برداری است
  - نقطه P از نقطه B به C تغییر مکان خطی دارد که تفاضل دو بردار موقعیت R_1 و R_2 می باشد.



- اگر مقدار تغییر مکان کوچک شود در حالت حدی بردار $\overrightarrow{\Delta s}$ مماس به مسیر ئر نقطه B خواهد بود .
- سرعت یک نقطه در امتداد مماس بر مسیر خواهد بود و مقدار آن نرخ زمانی تغییرات تغییرمکان خطی می باشد.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}$$

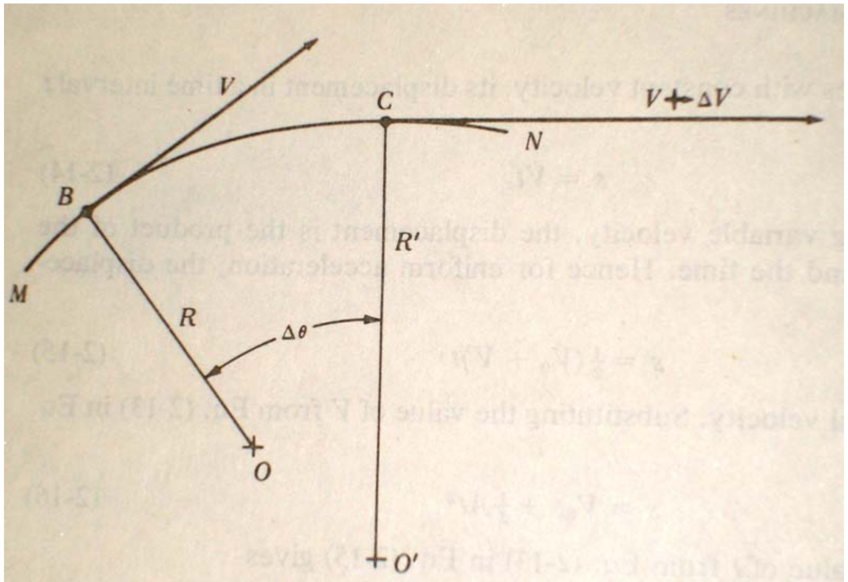
- تغییر مکان و سرعت زاویه ای
  - در نظر بگیرید یک جسم صلب حول یک محور ثابت در نقطه O دوران می کند
  - همچنین در نظر بگیرید که P نقطه ای ثابت در روی جسم صلب است. نقطه P به P’ در مدت زمان Δt تغییر مکان می یابد.
  - توجه شود که:
    - هنگام دوران تمامی نقاط دارای دارای سرعت زاویه ای یکسانی می باشند
    - سرعت خطی نقطه نسبت مستقیم با شعاع دوران دارد.

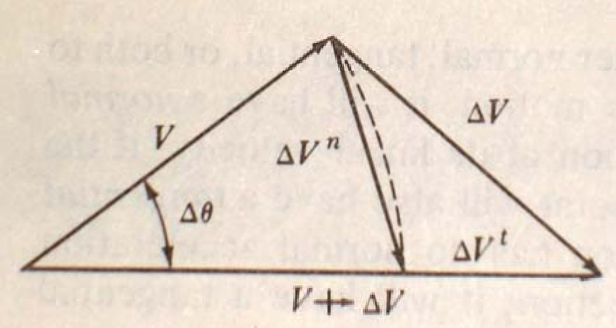


- شتاب خطی و زاویه ای
  - شتاب خطی نرخ زمانی تغییرات سرعت خطی می باشد. اگر جسم صلب حرکت خطی داشته باشد به عبارت دیگر فقط مقدار بردار سرعت تغییر نماید و راستای آن ثابت باقی بماند؛ آنگاه شتاب خطی لحظه ای:

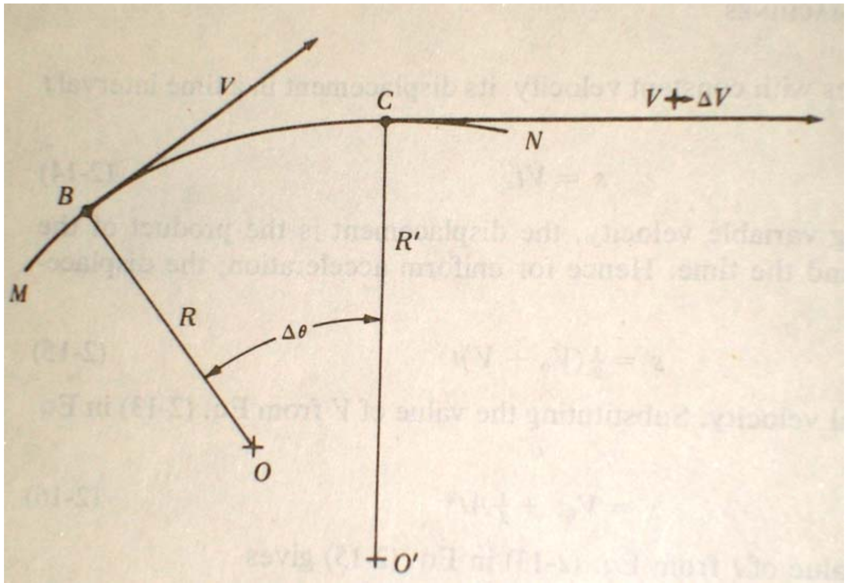
$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = \frac{dV}{dt}$$

- شتاب عمودی و مماسی
  - یک نقطه در امتداد مسیر خود می تواند شتاب عمودی ؛ مماسی یا ترکیب ایندو را همزمان داشته باشد.
  - اگر نقطه ای حرکت منحنی الخط داشته باشد آنگاه دارای شتاب عمودی است که ناشی از تغییر جهت سرعت خطی آن می باشد.
  - اگر اندازه سرعت خطی نیزتغییر نماید آنگاه نقطه شتاب مماسی خواهد داشت.
  - نقطه ای که حرکت مستقیم الخط دارد شتاب عمودی ندارد اما می تواند شتاب مماسی داشته باشد.



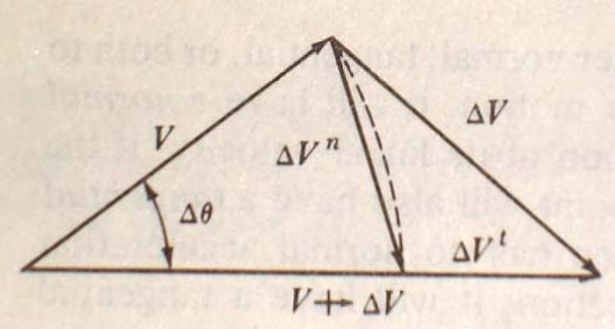


- شتاب عمودی و مماسی(ادامه)



$$A^t = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta V^t}{\Delta t}\right) = \frac{dV^t}{dt}$$

$$A^n = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta V^n}{\Delta t}\right) = \frac{dV^n}{dt}$$

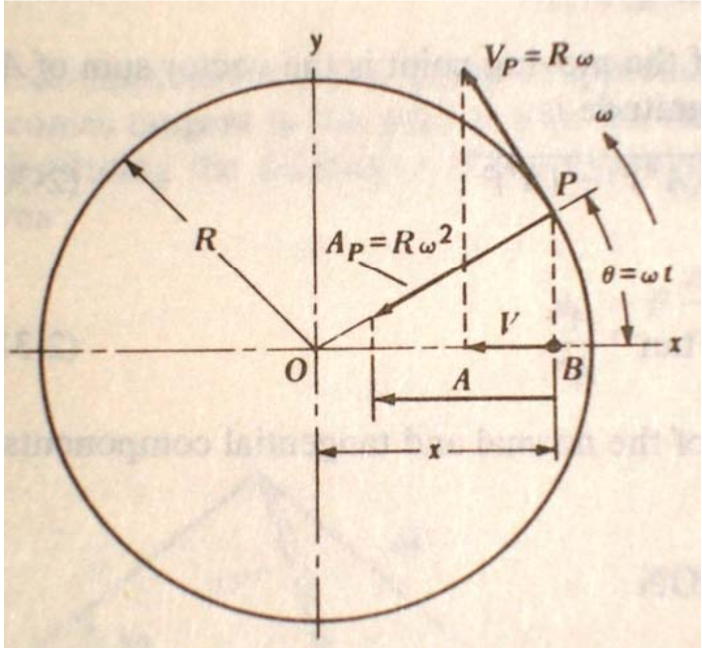


- کل شتاب نقطه جمع برداری A^n و A^t می باشد.

$$A = \sqrt{(A^t)^2 + (A^n)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} A^t / A^t$$

- حرکت هارمونیکی ساده
  - در حرکت خطی هنگامیکه شتاب متناسب با تغییرمکان با علامت مخالف تغییر نمایید حرکت هامونیکی ساده ایجاد می گردد.



حرکت یک نقطه با سرعت زاویه ای
ثابت روی یک دایره

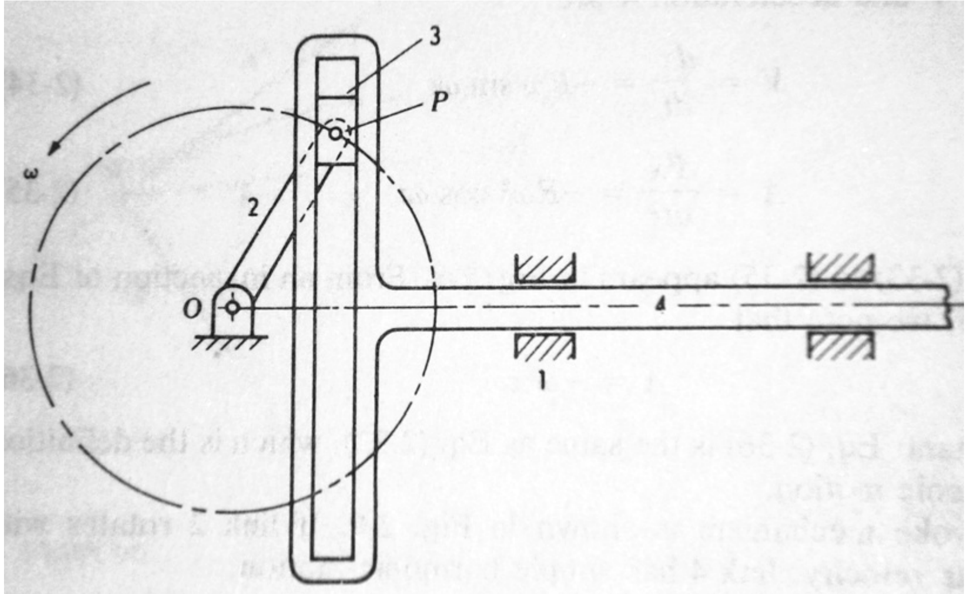
$$X = R\cos\omega t$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t$$

$$A = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$A = -\omega^2 X$$

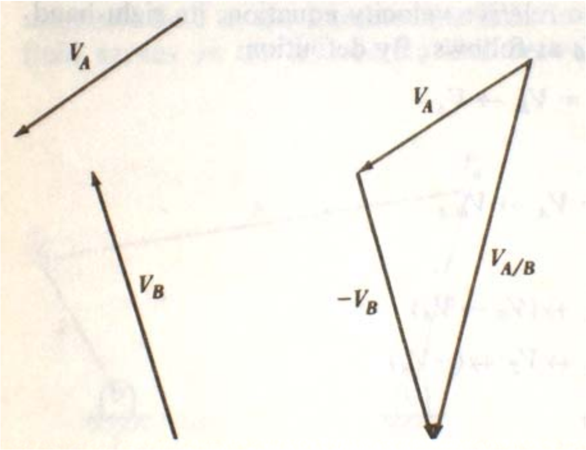
- مکانیزم Scotch-Yoke
  – اگر بازوی ۲ با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند آنگاه بازوی ۴ حرکت هارمونیکی ساده خواهد داشت.

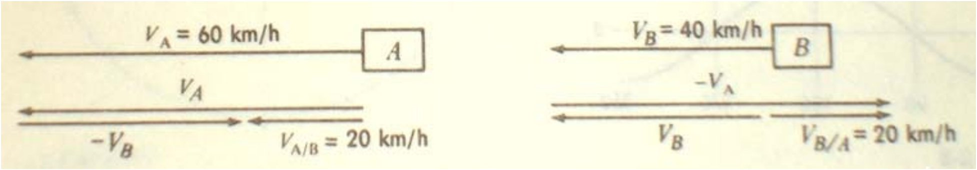


- حركت نسبي **Relative Motion**
  - حركت مطلق Absolute Motion
  - حركت نسبي؛ جسمي نسبت به جسم ديگر داراي حركت نسبي است در صورتي كه تفاوت در حركت مطلق آنها وجود داشته باشد.
    - تغيير مكان
    - سرعت
    - شتاب

$$V_A = V_B + V_{A/B}$$

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$





- حرکت نسبی زاویه ای
  - اگر دو جسم در یک صفحه یا صفحات موازی حرکت داشته باشند، حرکت زاویه ای نسبی آنها بصورت تفاضل حرکت زاویه ای مطلق آنها تعریف می گردد.

$$\theta_{3/2} = \theta_3 - \theta_2$$

$$\omega_{3/2} = \omega_3 - \omega_2$$

$$\alpha_{3/2} = \alpha_3 - \alpha_2$$

- **روشهای انتقال حرکت**

گاهی مکانیزمها براساس روش انتقال حرکت طبقه بندی می شوند.

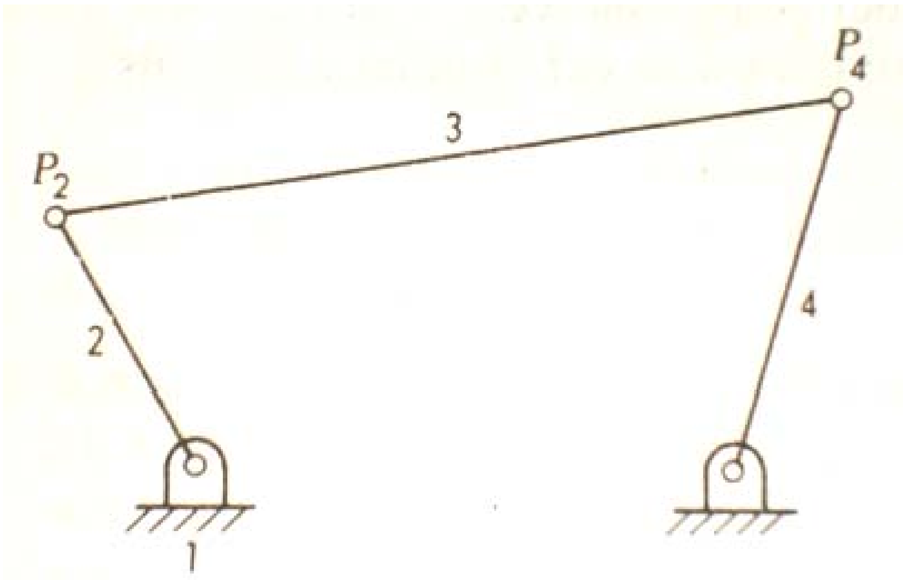
۱- متصل کننده صلب

۲- متصل کننده قابل انعطاف

۳- مکانیزم تماس مستقیم

۴- فشار هیدرولیک یا میدان مغناطیس

۱- متصل کننده صلب

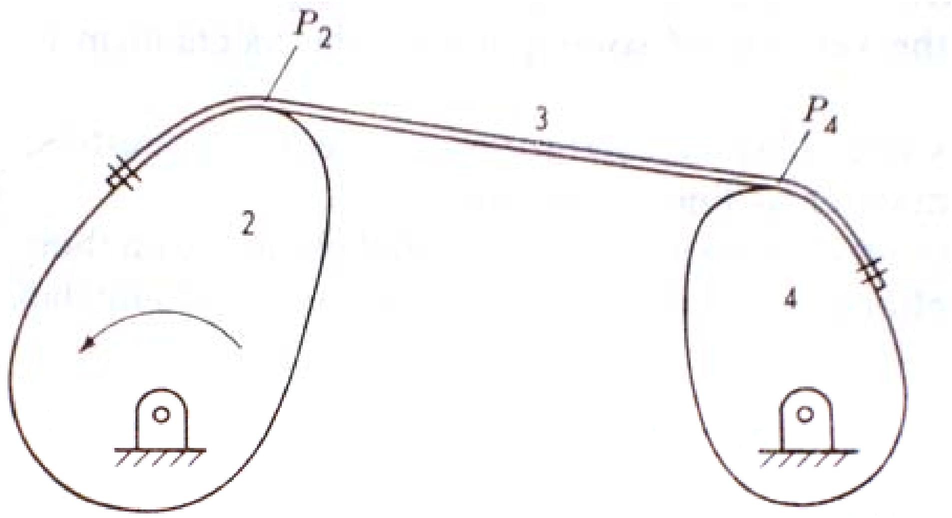


- عضو ۲ محرک نامیده شده
- عضو ۴ متحرک نامیده شده
- عضو ۳ یک متصل کننده صلب که حرکت را از عضو ۲ به ۴ منتقل می کند.

❖ آیا در هنگام انتقال حرکت تاخیری وجود دارد؟

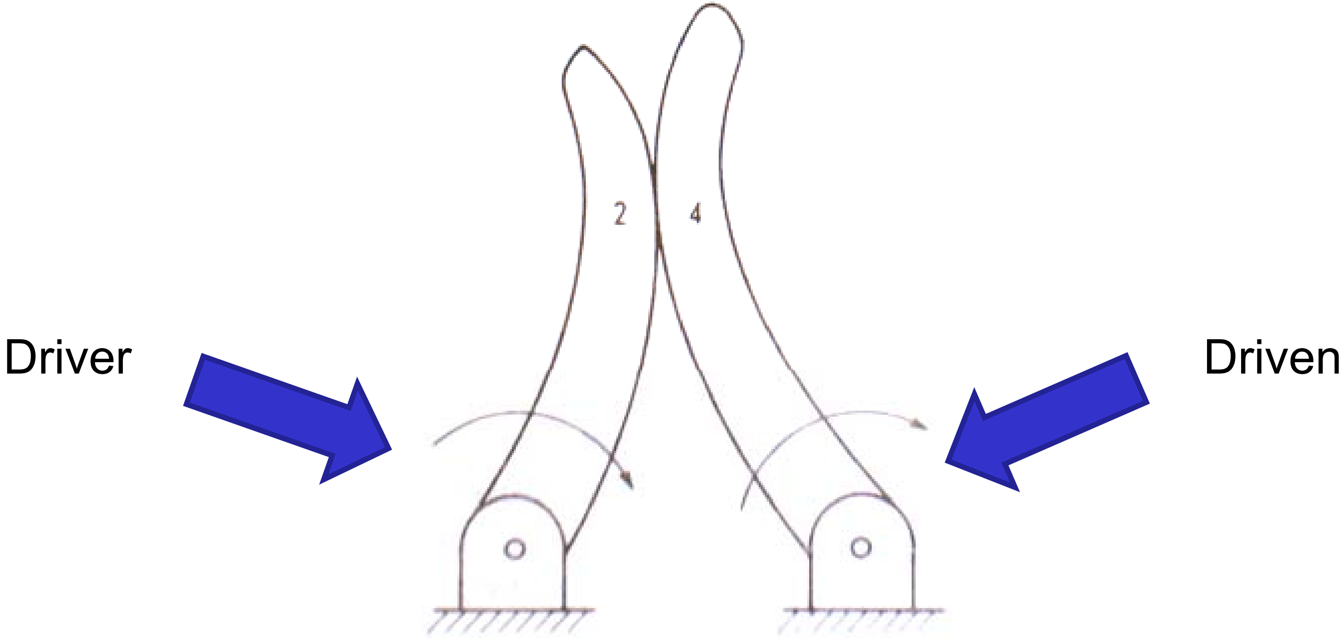
۲- متصل کننده قابل انعطاف

- تسمه یا زنجیر بصورت قابل انعطاف و کششی حرکت را منتقل می کند
- در مکانیزم نوار ۳ حرکت را از ۲ به ۴ منتقل می کند.



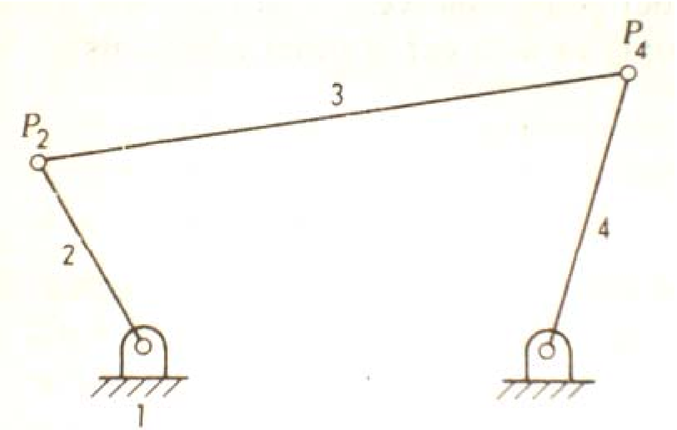
۳- مکانیزم تماس مستقیم

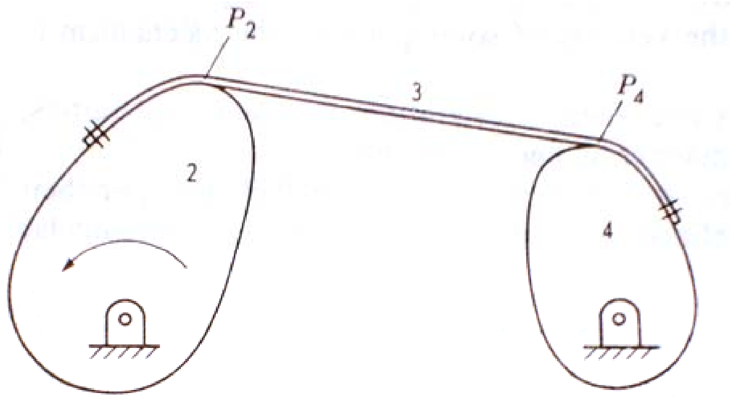
عضو محرک ۲ و متحرک ۴ در تماس مستقیم با یکدیگر می باشند. حرکت منتقل شده از عضو ۲ به عضو ۴ بستگی به شکل خارجی آنها و موقعیت نسبی آنها دارد. معمولا در این مکانیزم محرک، بادامک و متحرک، پیرو یا دنبال کننده نامیده می شود.



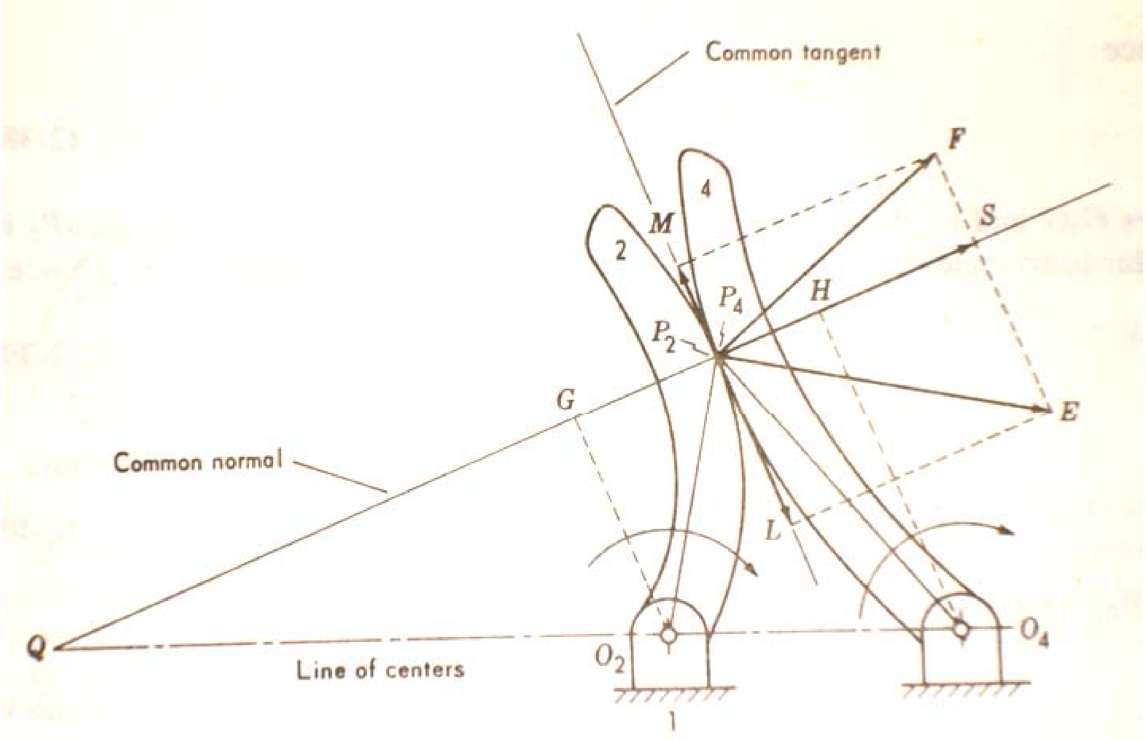
- خط انتقال حرکت **Line of Transmission**
  - حرکت در امتداد خط انتقال از محرک به متحرک منتقل می شود
  - خط P_2P_4 در شکلهای مکانیزم چهار میله و تسمه

❖ در مکانیزم تماس مستقیم خط انتقال حرکت چیست؟





- عمود مشترک در نقطه تماس دو سطح
  - فقط در صورتی که محرک در جهت عمود مشترک حرکت داشته با شد، می تواند متحرک را به حرکت در آورد.
  - خط مراکز O_2O_4



- نسبت سرعت زاویه ای
  - نقاط P_2 و P_4 متناظراً در روی اجسام ۲ و ۴ قرار گرفته اند و در لحظه نشان داده شده منطبق می باشند.
  - شعاع دوران نقاط P_2 و P_4 به ترتیب O_2P_2 و O_4P_4 می باشد
  - بردار سرعت نقطه P_2 P_2E
  - بردار سرعت نقطه P_4 P_4F

❖ارتباط مولفه های سرعت نقاط P_2 و P_4 در امتداد عمود مشترک چگونه است؟

- تعیین سرعت زاویه ای عضو ۴
  - سرعت زاویه ای عضو ۲ معلوم است (ورودی)

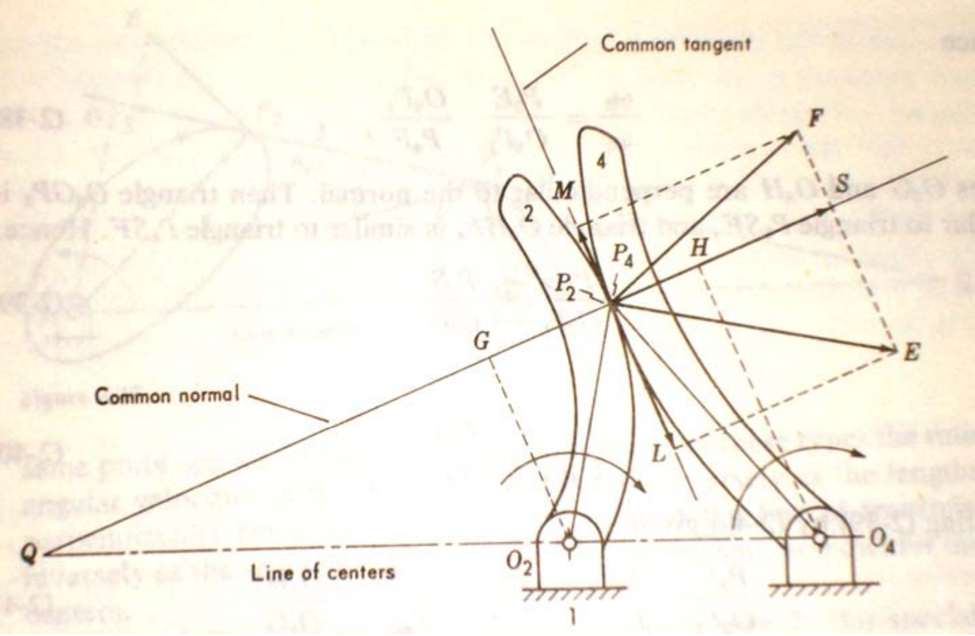
$$\omega_2 = \frac{V}{R} = \frac{P_2E}{O_2P_2}$$

$$\omega_4 = \frac{P_4F}{O_4P_4}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{P_2E}{O_2P_2} \times \frac{O_4P_4}{P_4F}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{O_4H}{O_2G}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{O_4Q}{O_2Q}$$

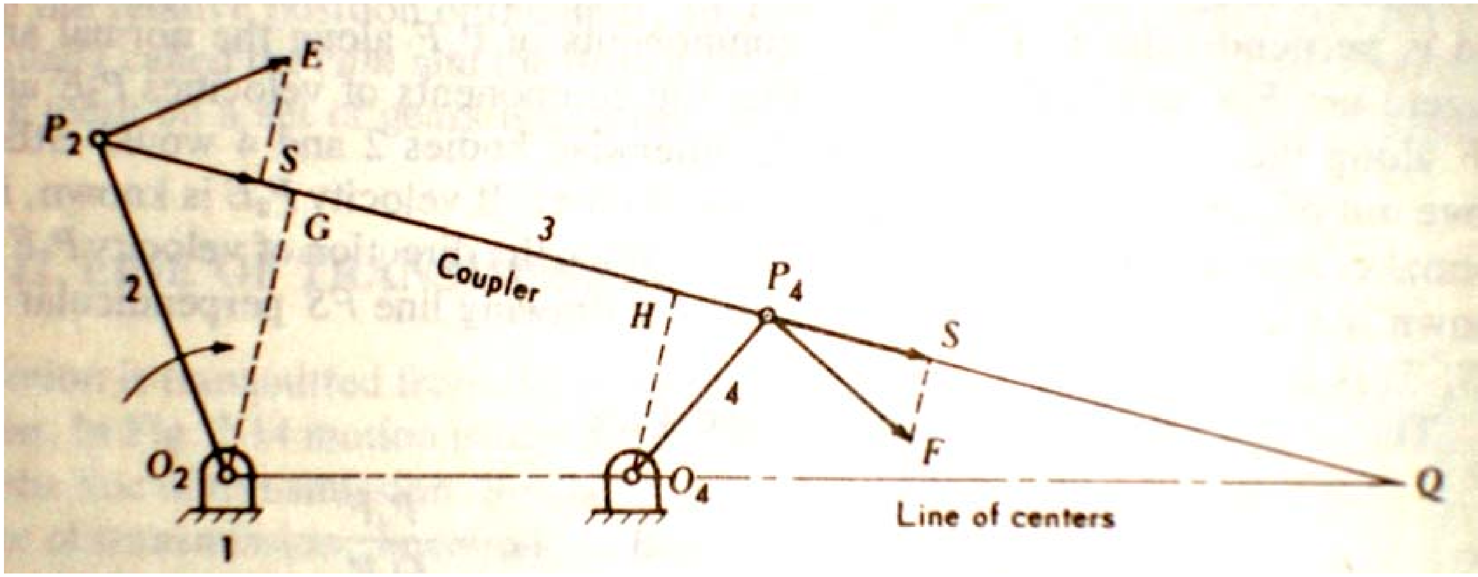


- سرعت زاویه ای عضو متحرک

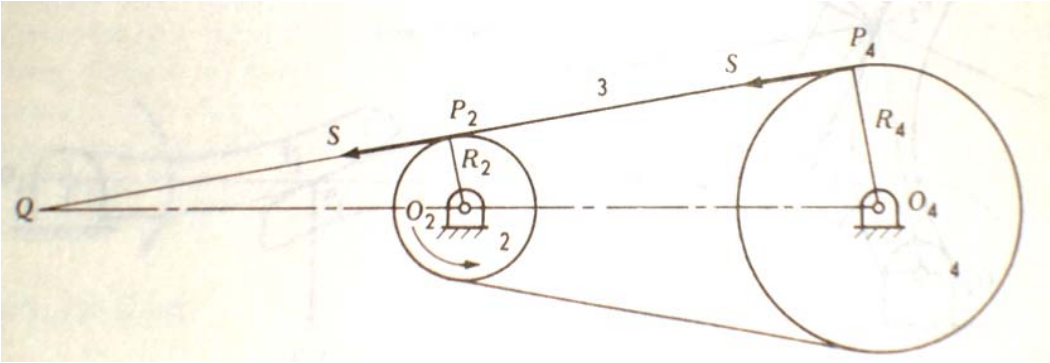
نسبت سرعت زاویه ای محرک به متحرک

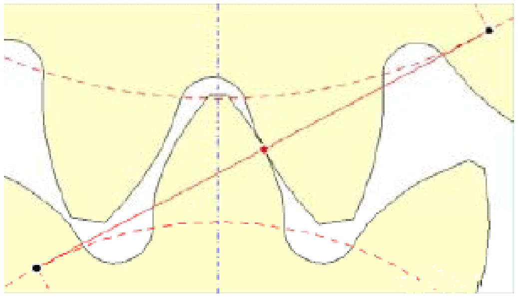
به نسبت عکس طول عمود از مرکز دوران به عمود مشترک

به نسبت عکس قطعات ایجاد شده توسط خط انتقال روی خط مراکز

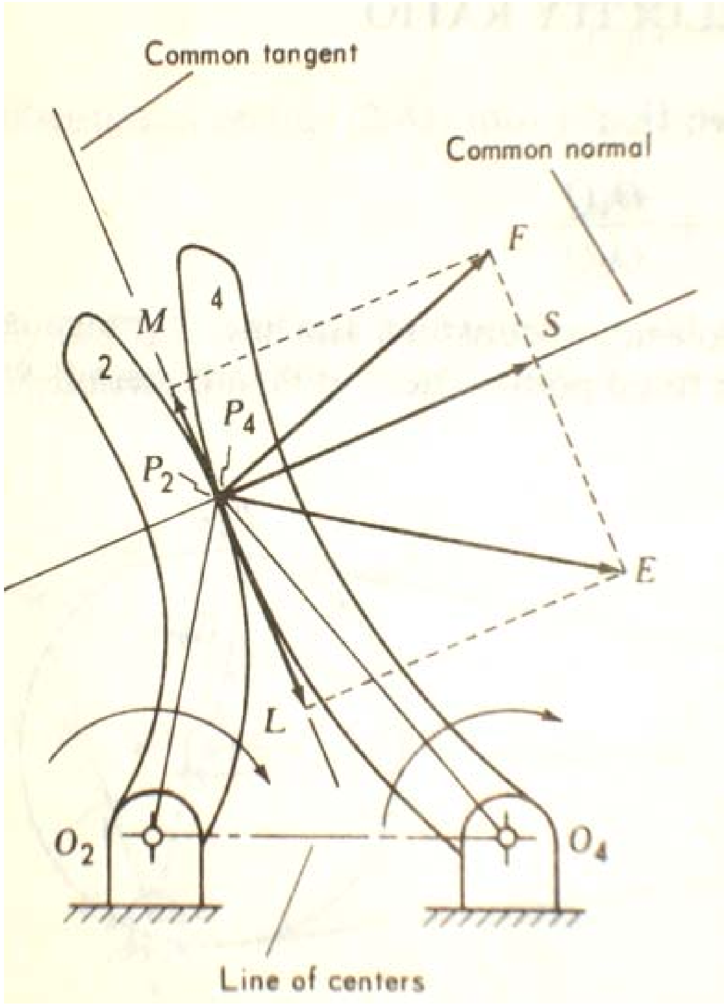


- نسبت سرعت زاویه ای ثابت
  - در صورتی نسبت سرعت زاویه ای ثابت است که خط انتقال در نقطه ثابتی خط مرکز را قطع نماید.





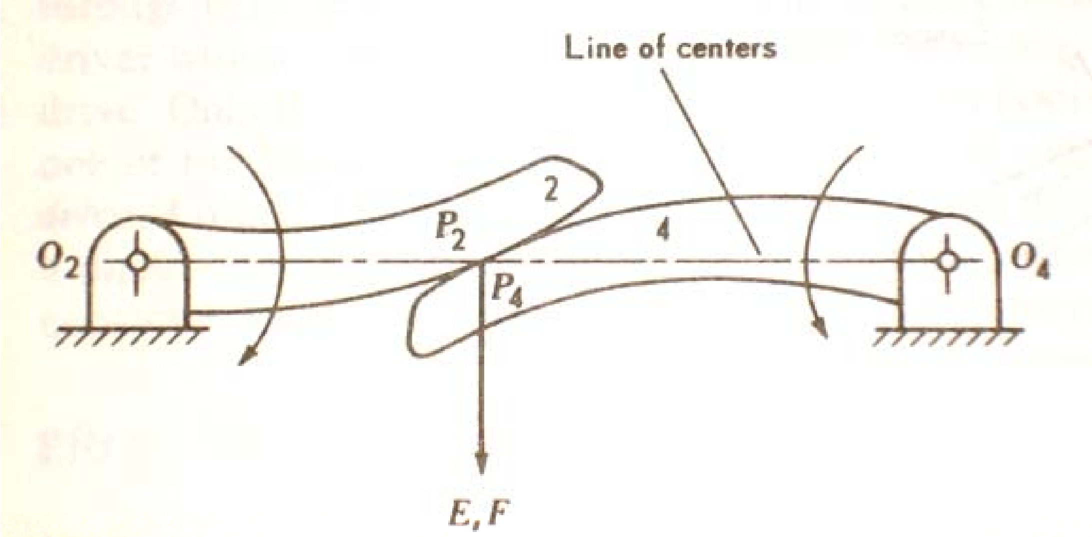
- در مکانیزم تماس مستقیم منحنی های زیادی وجود دارند که می توانند به عنوان سطوح تماس محرک و متحرک انتخاب شوند. و شرط نسبت سرعت زاویه ای ثابت رعایت گردد.



- تماس لغزشی (Sliding Contact)
  - هنگامیکه در نقطه تماس مکانیزم تماس مستقیم حرکت نسبی در امتداد مماس مشترک وجود داشته باشد، آنگاه لغزش داریم.
  - سرعت لغزش

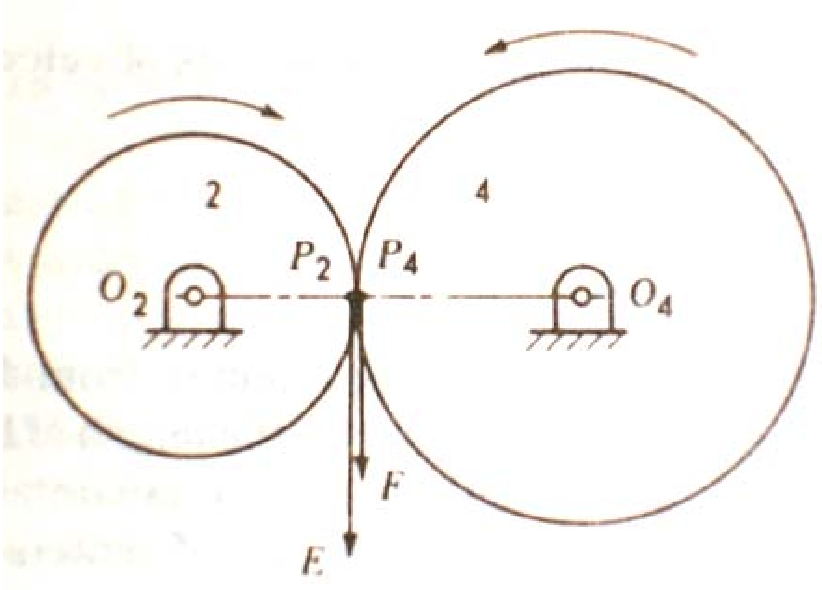
$$V_S = P_2L - P_4M = ML$$

- تماس غلتشی (Rolling Contact)
  - در مکانیزم تماس مستقیم اگر لغزش وجود نداشته باشد، آنگاه غلتش خواهیم داشت.
  - در این حالت مولفه های مماسی سرعت اندازه و جهت یکسانی خواهند داشت.
  - شرط $P_4F=P_2E$ در صورتی وجود دارد که شعاع O_2P_2 و O_4P_4 در یک امتداد قرار گیرند.



- شرط اینکه نقطه تماس در روی خط مراکز قرار گیرد یک شرط لازم برای غلتش است، اما این شرط کافی نمی باشد.

- در صورتی که مولفه های مماسی سرعت دو جسم در نقطه تماس یکسان نباشد لغزش وجود خواهد داشت.

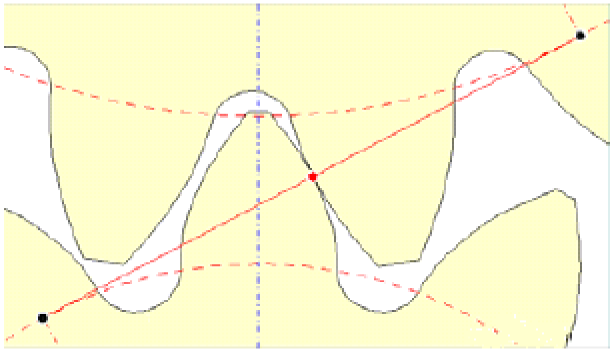


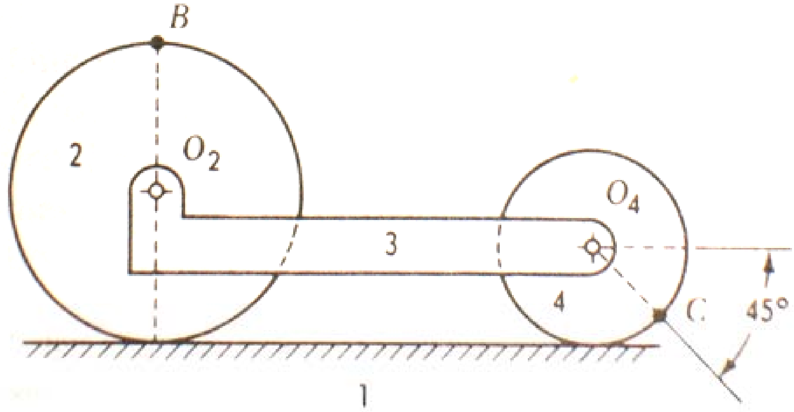
- **تمرینات و مسائل فصل ۲**

1) مکانیزم Scotch Yoke را با نرم افزار تحلیل نمایید.

2) حرکت نسبی: وسیله نشان داده شده در شکل با سرعت $30_{km/h}$ به سمت راست حرکت می کند. قطر چرخهای ۲ و ۴ به ترتیب ۰.۶ و ۰.۴ متر می باشد. سرعتهای زیر را برحسب m/s و rad/s بدست آورید.

$\omega_2, \omega_4, \omega_{2/4}$ $\quad$ $V_{O_2}, V_{B/O_2}, V_B, V_C, V_{B/C}$



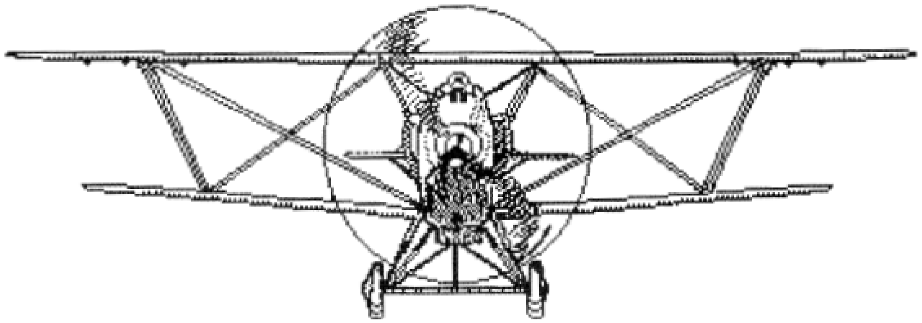


3) مکانیزم تماس مستقیم دو دندانه involutes چرخدنده را بررسی نمایید.

4) در مورد ویژه گی Positive Drive در مکانیزمها تحقیق نمایید.

فصل ۳

آشنائی با انواع مکانیزمها



> *Chance favors the prepared mind*
> PASTEUR

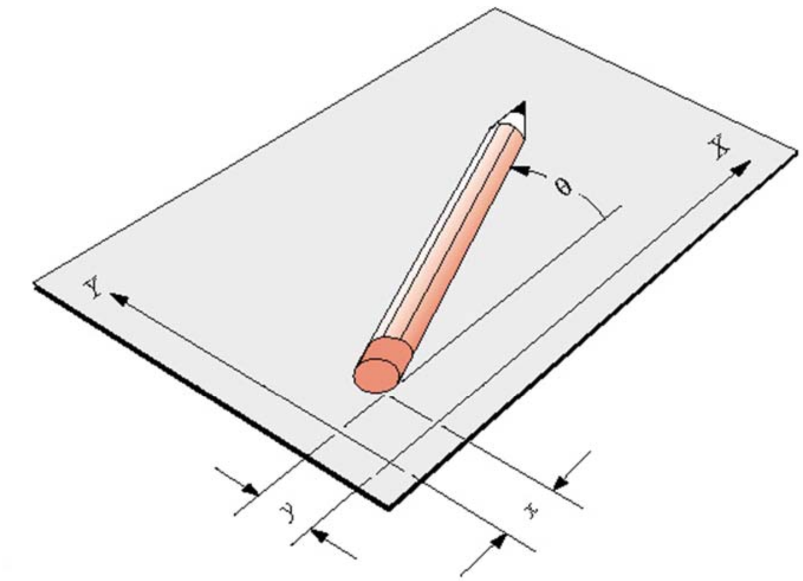
گروه مکانیک
دانشکده مهندسی
دانشگاه فردوسی مشهد

فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

- در این فصل مفاهیم اصلی مورد نیاز در تحلیل مکانیزمها بیان می گردد.
- درجه آزادی(DOF):
  - قابلیت حرکت (mobility) یک سیستم مکانیکی برحسب درجه آزادی طبقه بندی می شود.
  - درجه آزادی یک سیستم برابر با تعداد پارامترهای مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت لحظه ای آن سیستم در فضا می باشد.
  - توجه نمایید که درجه آزادی نسبت به یک قاب مرجع بیان می گردد.

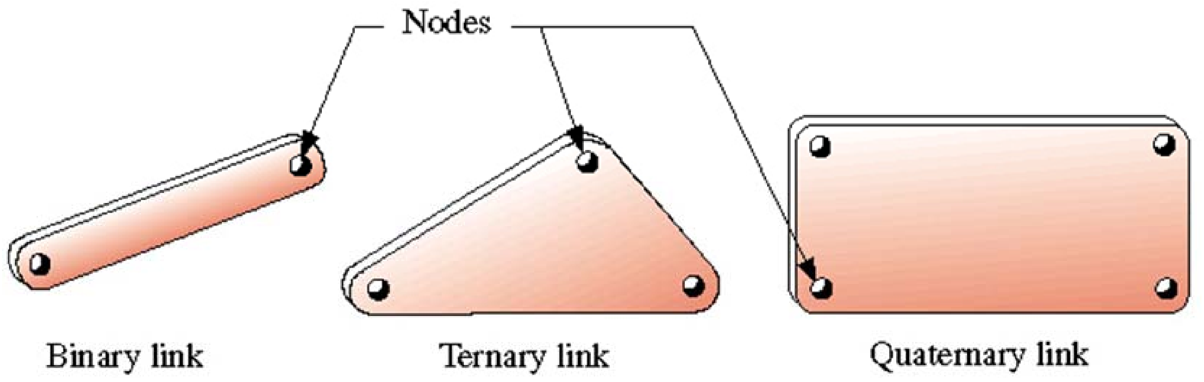
فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

- تعداد درجات آزادی جسم صلب در صفحه
  - موقعیت یک نقطه (x,y)
  - زاویه یک راستای ثابت نسبت به جسم(θ)



- تعداد درجات آزادی جسم صلب درفضا
  - شش درجه آزادی
    - سه موقعیت (x,y,z)
    - سه زاویه (θ,Φ,ρ)

- بازوها، اتصالات و زنجیره های سینماتیکی
  - Linkage از بازوها (links) و اتصالات (joints) تشکیل شده است.
  - Linkageها بلوکهای سازنده انواع مکانیزمها می باشند.
  - تمامی مکانیزمهای متداول (بادامکها، چرخدنده ها، تسمه و زنجیر) در حقیقت در مقوله Linkageها قرار می گیرند.
  - بازو (link) جسم صلبی بوده که حداقل دارای دو گره (node) باشد



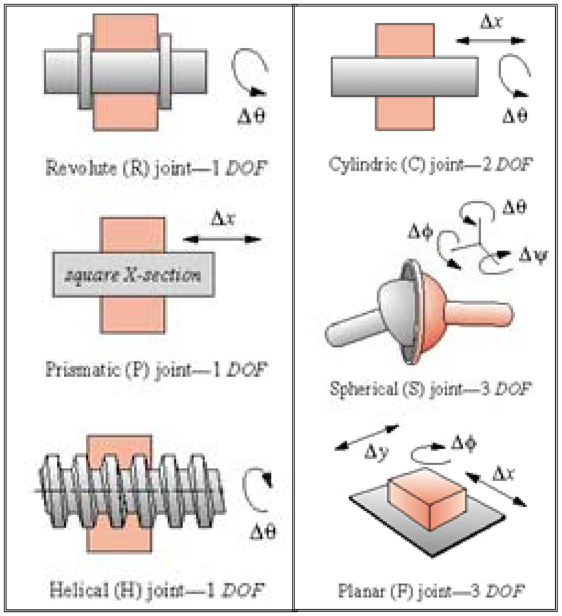
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- اتصال (joint) امکان حرکت بین دو بازو را فراهم می کند.
- اتصال که جفت سینماتیکی (kinematic pair) نیز نامیده می شود، به صورت های مختلفی طبقه بندی می شود:
  - نوع تماس بین اجزاء: نقطه ای، خطی، یا سطحی
  - تعداد درجات آزادی امکان پذیر در اتصال
  - نوع محصور بودن(closure): قید نیروئی(force) یا قید شکلی(form)
  - تعداد بازوهای متصل شده که مرتبه(order) اتصال نامیده می شود.
- Lower and higher pairs
  - Lower pair: تماس در کل یک سطح
  - Higher pair: تماس در روی یک نقطه یا در امتداد یک خط

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- شش نوع اتصال (lower pair) ، درجه آزادی و نماد تک حرفی آن
- در مکانیزمهای صفحه ای تنها اتصالات (lower pair)
  - Revolute(R) و
  - Prismatic(P) قابل استفاده اند.

سایر اتصالات توسط این دو ساخته شده و در مکانیزمهای فضائی استفاده می شوند.

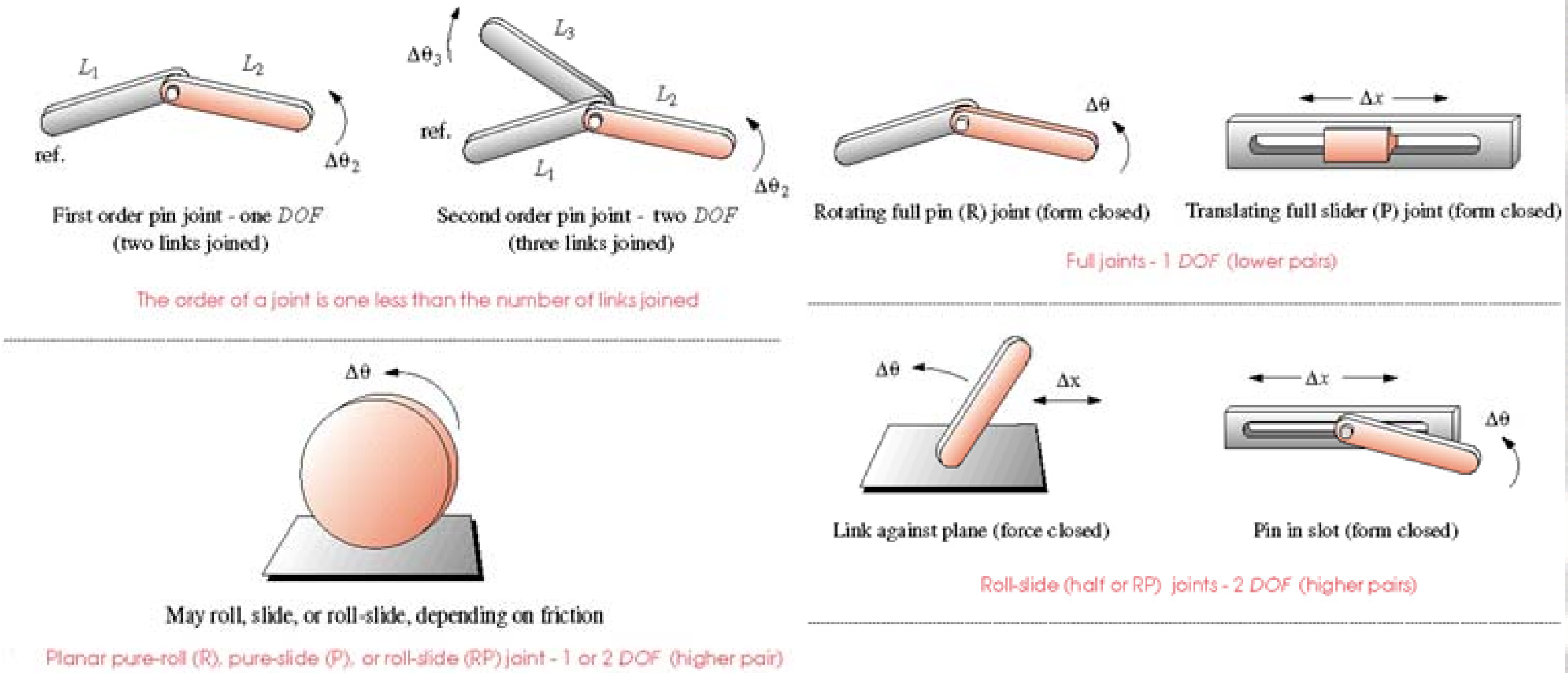


The Six Lower Pairs

Name (Symbol)	DOF	Contains
Revolute (R)	1	R
Prismatic (P)	1	P
Helical (H)	1	RP
Cylindric (C)	2	RP
Spherical (S)	3	RRR
Planar (F)	3	RPP

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- روش مفیدتری برای طبقه بندی اتصالات بر حسب درجه آزادی می باشد.



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- نکاتی دیگر
  - اتصال با دو درجه آزادی، بطور همزمان امکان دو حرکت نسبی مستقل فراهم می کنند.
    - half joint ⟷ full joint
    - roll-slide
    - pure rolling joint
    - pure sliding joint
  - مرتبه اتصال
    - تعداد بازوهای متصل شده منهای یک واحد
  - Crank: بازوئی که دوران کامل دارد و به زمین پین شده است
  - Coupler: بازوئی که حرکت توام خطی-دورانی دارد و به زمین پین نشده است
  - Ground: زمین هر بازوئی که نسب به قاب اصلی ثابت شده باشد.

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- تعیین درجه آزادی (DOF) یا Mobility
  - جهت تحلیل مجموعه ای از بازوها و اتصالات که برای حل یک مسئله پیشنهاد شده است ابتدا باید درجه آزادی آن تعیین گردد.
  - DOF یا Mobility یک سیستم به صورت زیر نیز تعریف می گردد:
    - تعداد ورودیهای مورد نیاز برای ایجاد خروجی قابل پیش بینی
    - تعداد مختصات مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت سیستم
  - درجه آزادی مکانیزمهای صفحه ای

$$M=3(L-1)-2J_1-3J_2$$ **معادله Greubler**

M= DOF or Mobility

L= تعداد بازوها

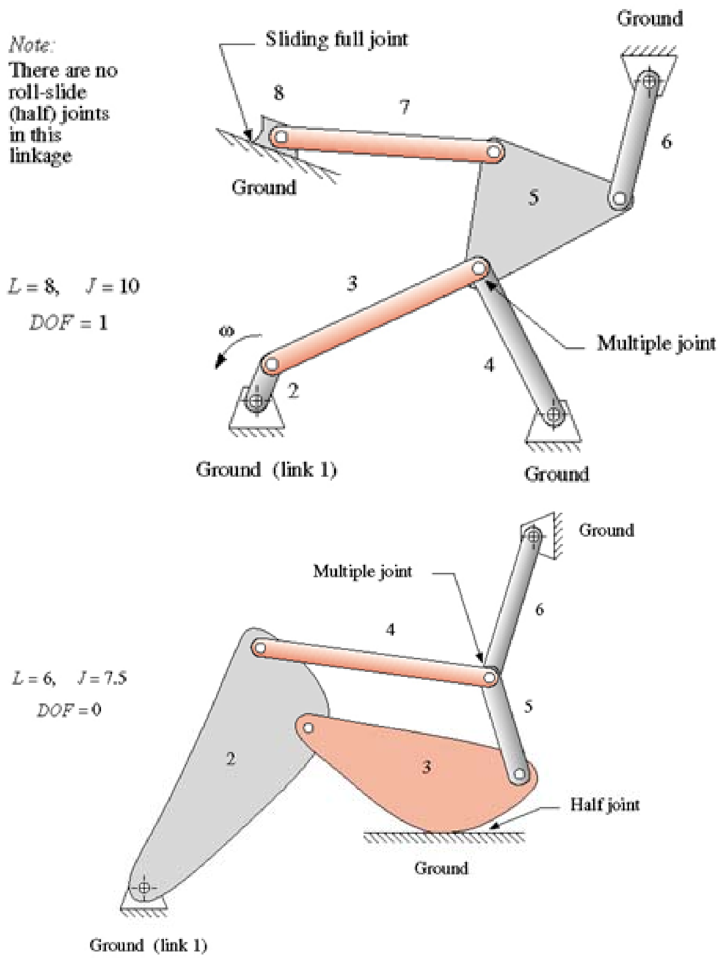
J_1= تعداد اتصالاتی که دو درجه آزادی می گیرند

J_2= تعداد اتصالاتی که یک درجه آزادی می گیرند

❖**صحت رابطه فوق را برای مکانیزم چهار میله و لغزنده-لنگ بررسی نمایید.**

❖**صحت رابطه فوق را اثبات نمایید؟**

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها



انواع اتصالات در مکانیزم ها

اتصال کامل

اتصال چندگانه

اتصال half

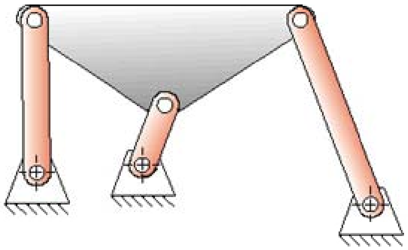
اتصال لغزشی- غلتشی

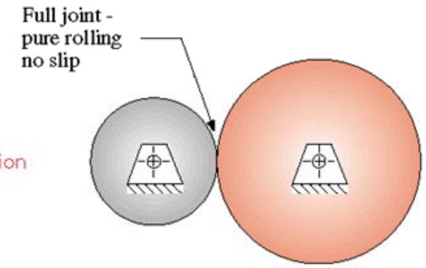
❖ توجه نمایید که در رابطه اطلاعاتی در مورد اندازه یا شکل داده نشده است.

فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

- پارادوکس
  - از آنجائیکه معادله Greubler در ارتباط با اندازه و شکل نیست، می تواند نتایج گمراه کننده ای در ترکیبهای هندسی یکسان داشته باشد به مثالهای زیر توجه نمایید.

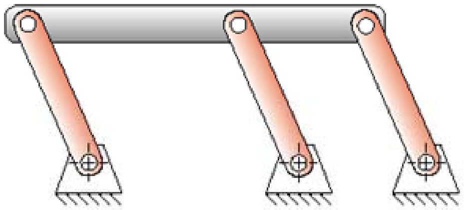
The E-quintet with *DOF* = 0
—agrees with Gruebler equation





Rolling cylinders with *DOF* = 1
—disagrees with Gruebler equation
which predicts *DOF* = 0

The E-quintet with *DOF* = 1
—disagrees with Gruebler equation
due to unique geometry

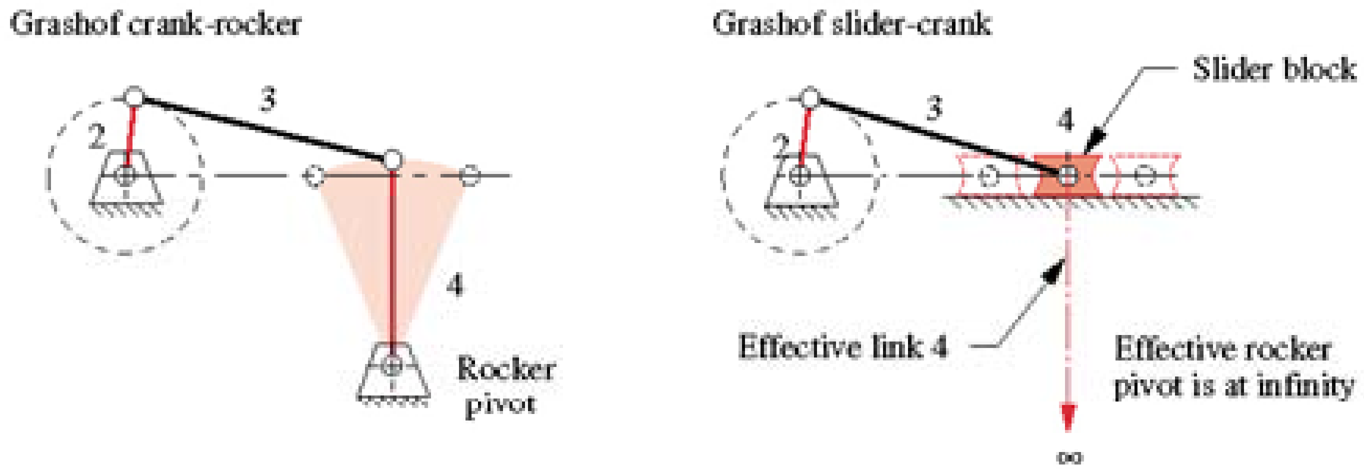


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

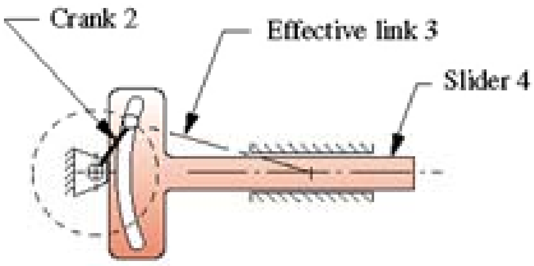
- تبدیل مکانیزمها (linkage transform)
  - قواعد تبدیل زنجیره های سینماتیکی صفحه ای

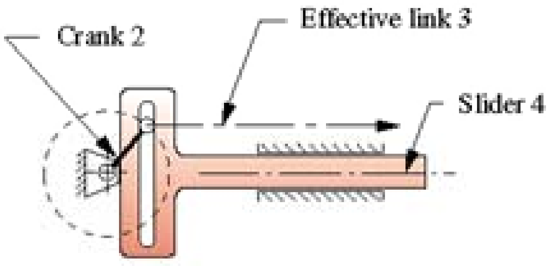
1) اتصال نوع R در یک حلقه را می توان با اتصال نوع P جایگذین کرد و تغییری در DOF مکانیزم بوجود نمی آید، البته به شرط اینکه حداقل دو اتصال نوع R در حلقه باقی بماند.
2) هر اتصال کامل را می توان با اتصال نیمه (half) جایگذین کرد. این تبدیل به DOF یک واحد اضافه می کند.
3) حذف یک بازو از DOF یک واحد کم می کند.
4) ترکیب قواعد ۲ و ۳
5) می توان یک گره از تعداد گره های عضو ternary یا بالاتر را حذف نمود و یک اتصال چندگانه ایجاد کرد. این عمل درجه آزادی را تغییر نمی دهد.
6) در صورتی که یک عضو چند گرهی کاملا حذف گردد و یک اتصال چندگانه ایجاد شود، از DOF یک واحد کاسته می شود.

- **کاربرد قاعده ۱**
  - تبدیل مکانیزم چهارمیله crank-rocker به یک لغزنده-لنگ slider-crank
  - بازوی ۴ تبدیل به یک بلوک لغزنده
  - در واقع این تبدیل معادل با افزایش طول rocker به حدی است که حرکت اتصال بین بازو ۳ و ۴ از دایره ای به خطی تبدیل شود.
  - بنابر این لغزنده معادل با یک rocker با طول بسیار بلند است که در راستای عمود بر لغزش در بینهایت پین شده است.

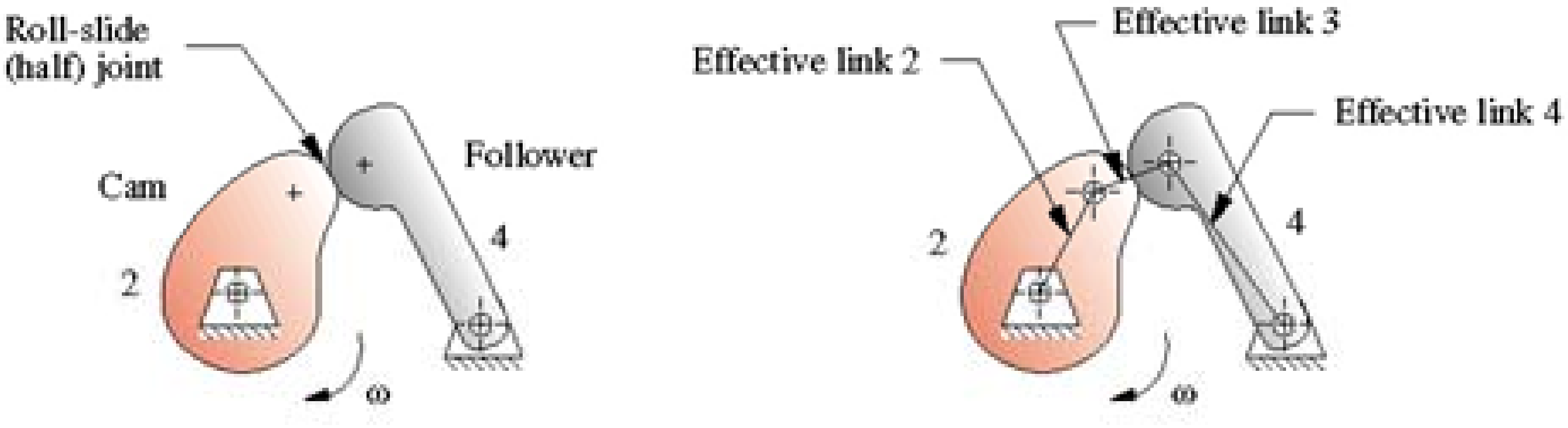


- **کاربرد قاعده ۴**
  - جایگذینی coupler با یک half joint
  - **حالت اول**: حرکت لغزنده یکسان باقی بماند، عضو ۳ مجازی عمود بر مماس شیار است و همیشه درموقعیت coupler اولیه قرار گرفته است.
  - **حالت دوم**: شیار مستقیم و عمود بر راستای لغزش است. عضو ۳ مجازی در بینهایت پین شده است(Scotch Yoke).



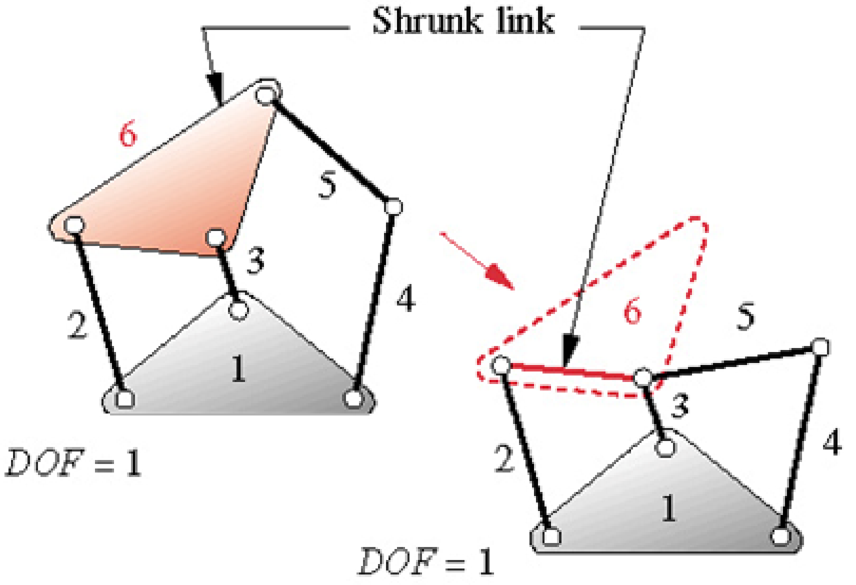


- **کاربرد قاعده ۴**
  - تبدیل مکانیزم چهار میله به بادامک-پیرو، بازو ۳ حذف شده و یا half joint بین بازوهای ۲ و ۴ قرارگرفته و مکانیزم جدید یک DOF دارد.
  - در واقع بادامک-پیرو معادل مکانیزم یک چهار میله است که coupler مجازی آن طول متغیر دارد.



- Stephenson’s six-bar chain
  - با استفاده از قاعده ۵، بازو ۶ حذف شده و یک اتصال چندگانه ایجاد شده است و مکانیزم هنوز یک درجه آزادی دارد.

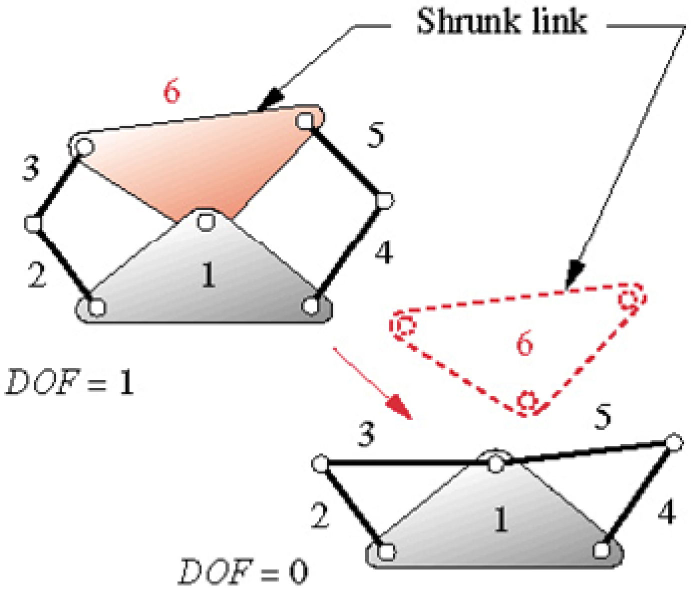
Stephen’s six-bar chain



Partial shrinkage of higher link retains original DOF

- Watt’s six-bar chain
  - یک بازو چند گرهی کاملا حذف شده و یک اتصال چند گرهی ایجاد شده است(قاعده ۶). در نتیجه از DOF یک واحد کاسته شده است.

Watt’s six-bar chain



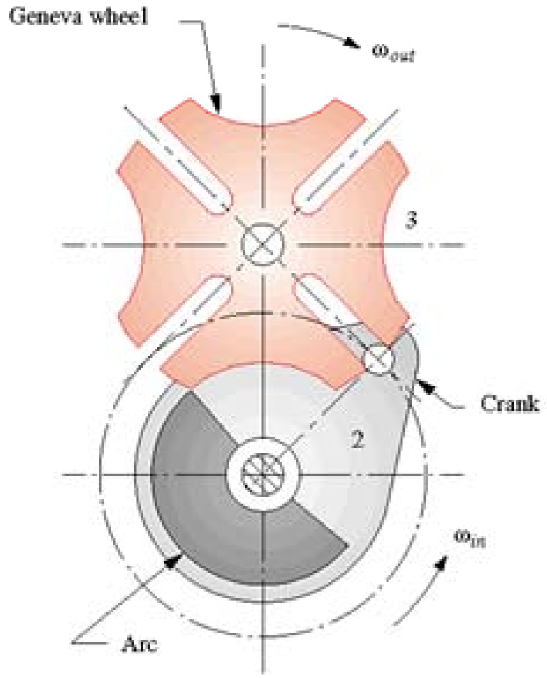
Complete shrinkage of higher link reduces *DOF* by one

- حرکت منقطع (Intermittent Motion)
  - یک سری حرکت و توقف

Dwell → a period in which output link remains stationary while input link continues to move

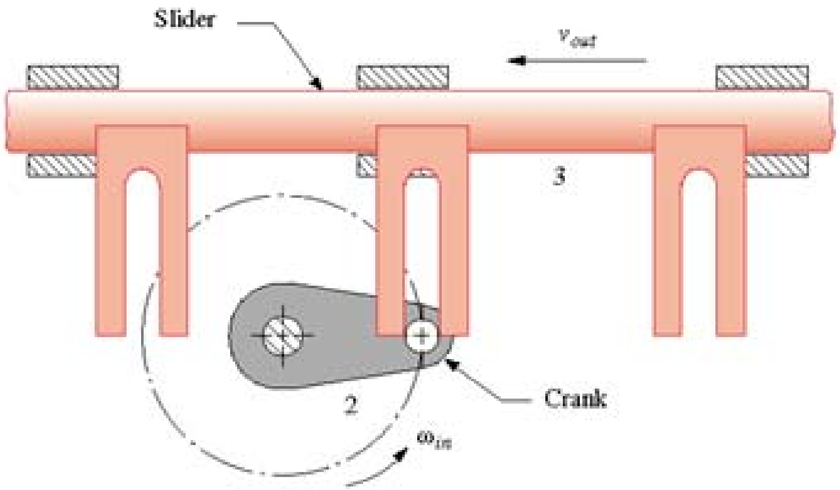
در خیلی از کاربردها حرکت منقطع مورد نیاز است. به عنوان مثال می توان به مکانیزم بادامک- پیرو اشاره کرد که در فصل ۸ طراحی بادامک ها بررسی خواهد شد.

- Geneva Mechanism
  - ورودی معمولا توسط یک موتور با سرعت دورانی ثابت تامین می شود.



Four-stop Geneva mechanism

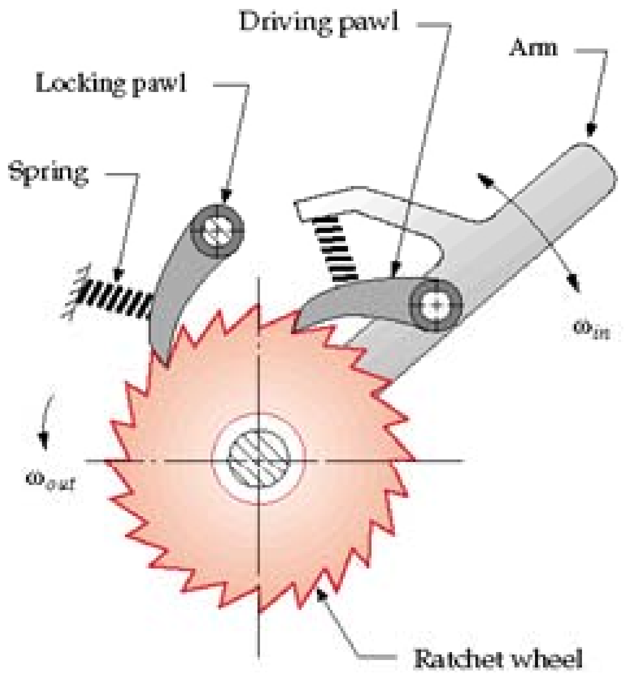
دورانی



Linear intermittent motion 'Geneva' mechanism

خطی

- Ratchet and Pawl
  - Arm حول مرکز Ratchet Wheel پین شده است و حرکت نوسانی می تواند داشته باشد.
  - Pawl محرک Ratchet Wheel را در جهت خلاف عقربه های ساعت به حرکت در آورده و در جهت دیگر مکانیزم قفل است.
  - Locking Pawl از حرکت در جهت عکس جلوگیری می کند.
  - این مکانیزم در موارد ذیل استفاده می شود:
    - آچار جغجغه
    - وینچ
    - سنگ تخت



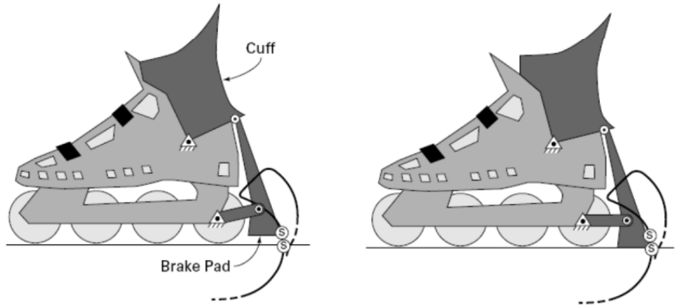
Ratchet and pawl mechanism

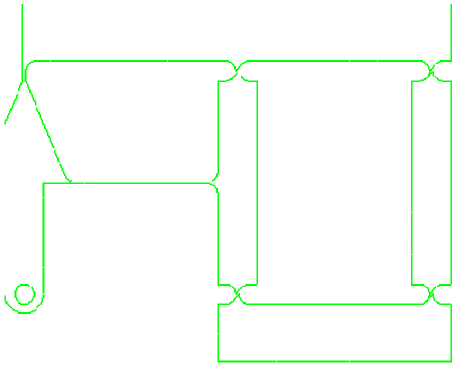
- شرط Grashof
  - مکانیزم چهار میله
    - ساده ترین مکانیزم تک درجه آزادی با اتصال پین می باشد.
    - معادلهای متعددی دارد: لغزنده لنگ، بادامک پیرو و ..
    - متداولترین مکانیزم در ماشینهاست
    - انواع حرکات مورد نظر را می تواند تولید کند.

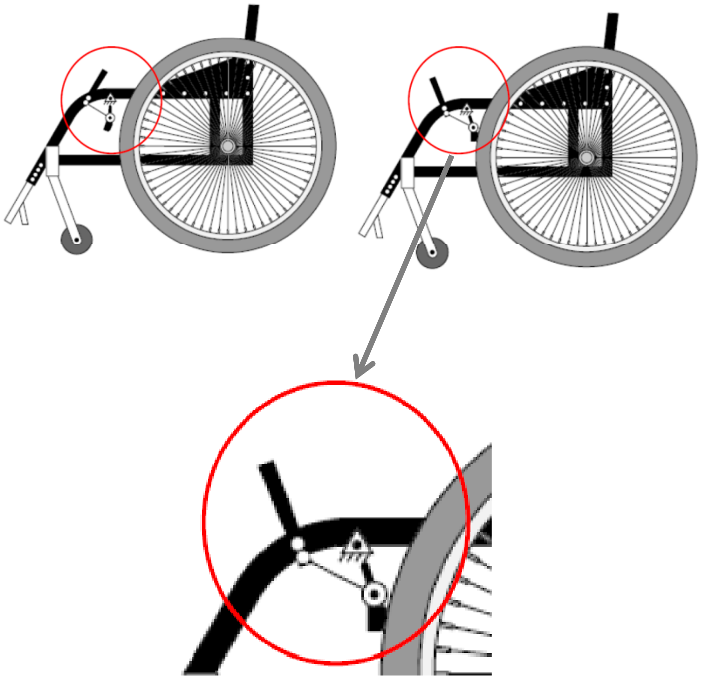
Simplicity is one mark of good design

Among the first solution to motion control problems

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها







فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- شرط Grashof رابطه بسیار ساده ای که رفتار دورانی (rotate-ability) مکانیزم چهار میله را پیش بینی می کند.

S = طول کوتاهترین بازو
L = طول بلندترین بازو
P = طول بازوی دیگر
Q = طول بازوی باقیمانده

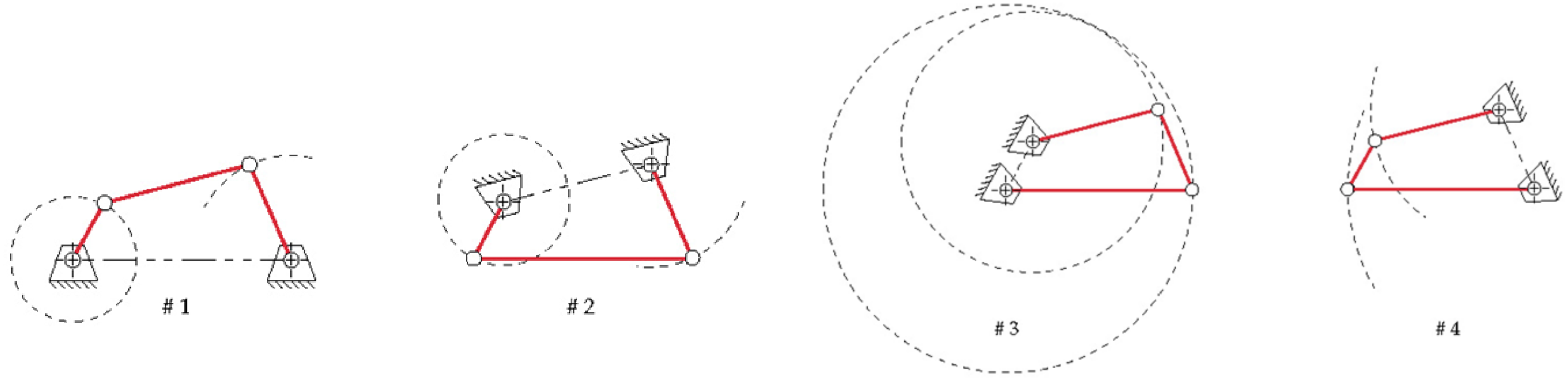
اگر S+L <= P+Q
مکانیزم Grashof نامیده شده و حداقل یک بازو دوران کامل نسبت به زمین دارد.
به آن زنجیره سینماتیکی class I نیز اطلاق می شود.

اگر P+Q > S+L
مکانیزم Non-Grashof نامیده شده و هیچ بازوئی دوران کامل نسبت به سایر بازوها ندارد.
به آن زنجیره سینماتیکی class II اطلاق می شود.

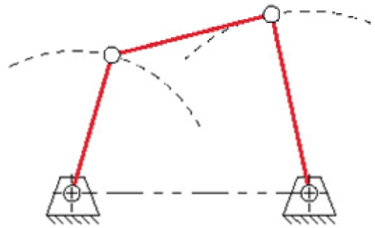
توجه نمایید که قضایاء فوق بدون در نظر گرفتن ترتیب بازوها در مکانیزم است.

حرکت چهار میله بستگی به شرط Grashof و معکوس(inversion) انتخاب شده دارد
که معمولا نسبت به کوتاه ترین بازو تعریف می شود

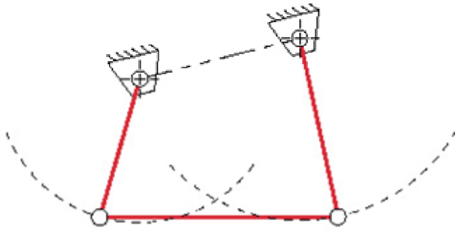
- حالت Class I و S+L<P+Q
  - بازوی ثابت مجاور کوتاه ترین بازوست، در این حالت کوتاه ترین بازو دوران کامل داشته و بازوی دیگر که به زمین پین شده نوسان دارد.
  - زمین کوتاه ترین بازوست، چهار میله double-crank است. دو بازو پین شده به زمین دوران کامل داشته
  - ❖ در این حالت حرکت coupler چگونه است؟
  - زمین مقابل کوتاهترین بازو قرار گیرد، یک Grashof double-rocker ایجاد می شود. دو بازوی پین شده به زمین نوسان داشته و تنها بازو coupler دوران کامل دارد.



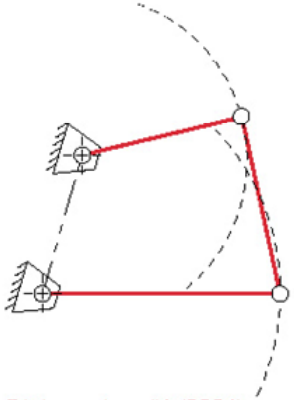
- حالت Class II و $S+L>P+Q$
  - همه معکوسها Triple Rocker خواهند بود و هیچ بازوئی دوران کامل نخواهد داشت.



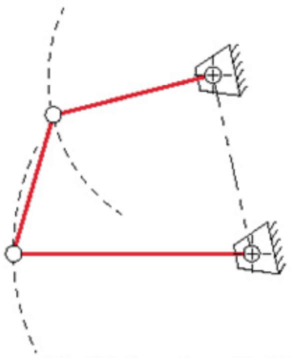
Triple-rocker #1 (RRR1)



Triple-rocker #2 (RRR2)

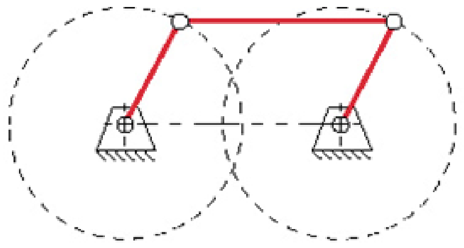


Triple-rocker #3 (RRR3)

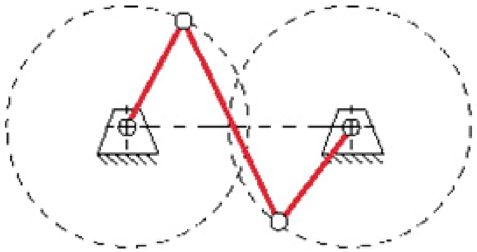


Triple-rocker #4 (RRR4)

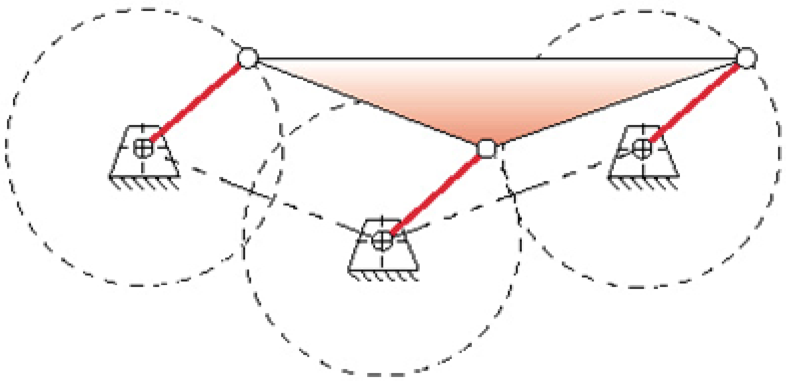
- حالت Class III و S+L=P+Q
  - که به آن زنجیره سینماتیکی special-case Grashof یا Class III گفته می شود.
  - تمام معکوسها double-cranks یا crank-rockers بوده و دارای دو نقطه تبدیل در یک دوران می باشند، وقتی که بازوها همراستا می شوند.
  - در این نقطه رفتار خروجی غیرقابل پیش بینی است.



Parallelogram form



Antiparallelogram form



Double-parallelogram linkage gives parallel motion (pure curvilinear translation) to coupler and also carries through the change points

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- طبقه بندی مکانیزمهای چهار میله
  - روش طبقه بندی برای پیش بینی نوع حرکت ماکنیزم چهارمیله بر مبنای مقادیر نسبت بازوها توسط آقای Barker پیشنهاد شده است.
  - حرکت دورانی چهارمیله مستقل از مقادیر مطلق طول بازوها می باشد. لذا می توان طول بازوها را به طول بازو دوم تقسیم کرد و نسبتهای بدون بعد نرمال شده بدست آورد:

$$\lambda_1=r_1/r_2 \quad \lambda_3=r_3/r_2 \quad \lambda_4=r_4/r_2$$

  - برحسب نوع حرکت بازو به آن حرفی اطلاق می گردد:

C = crank
R = rocker
G = Grashof
S = special case Grashof

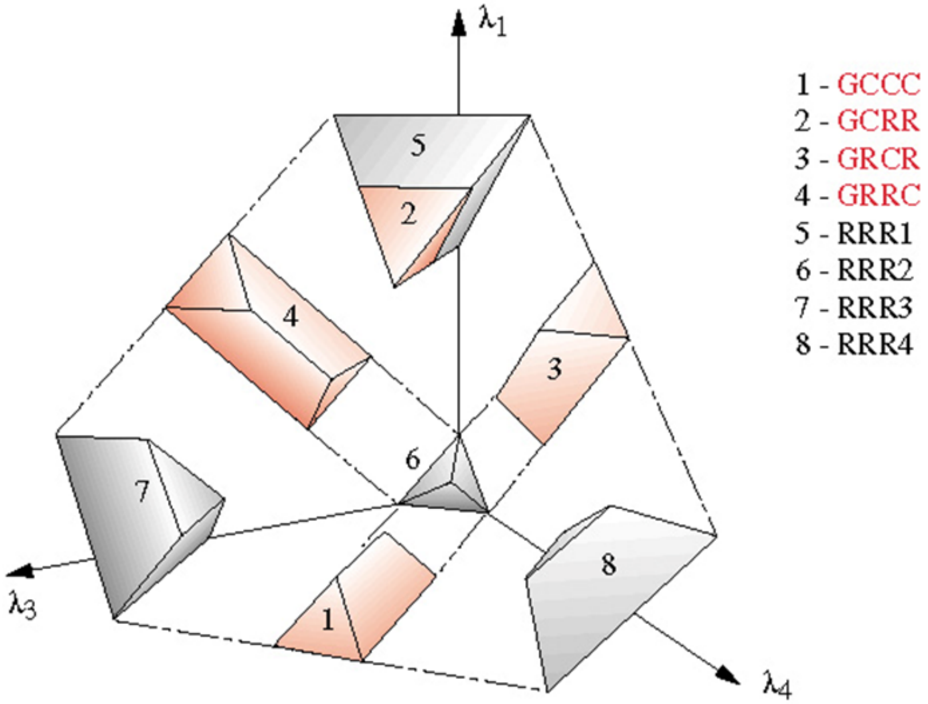
Barker's Complete Classification of Planar Fourbar Mechanisms

Adapted from ref. (10). s = shortest link, l = longest link, Gxxx = Grashof, RRRx = non-Grashof, Sxx = Special case

Type	$s + l$ vs. $p + q$	Inversion	Class	Barker's Designation	Code	Also Known As
1	<	$L_1 = s$ = ground	I-1	Grashof crank-crank-crank	GCCC	double-crank
2	<	$L_2 = s$ = input	I-2	Grashof crank-rocker-rocker	GCRR	crank-rocker
3	<	$L_3 = s$ = coupler	I-3	Grashof rocker-crank-rocker	GRCR	double-rocker
4	<	$L_4 = s$ = output	I-4	Grashof rocker-rocker-crank	GRRC	rocker-crank
5	>	$L_1 = l$ = ground	II-1	Class 1 rocker-rocker-rocker	RRR1	triple-rocker
6	>	$L_2 = l$ = input	II-2	Class 2 rocker-rocker-rocker	RRR2	triple-rocker
7	>	$L_3 = l$ = coupler	II-3	Class 3 rocker-rocker-rocker	RRR3	triple-rocker
8	>	$L_4 = l$ = output	II-4	Class 4 rocker-rocker-rocker	RRR4	triple-rocker
9	=	$L_1 = s$ = ground	III-1	change point crank-crank-crank	SCCC	SC* double -crank
10	=	$L_2 = s$ = input	III-2	change point crank-rocker-rocker	SCRR	SC crank-rocker
11	=	$L_3 = s$ = coupler	III-3	change point rocker-crank-rocker	SRCR	SC double-rocker
12	=	$L_4 = s$ = output	III-4	change point rocker-rocker-crank	SRRC	SC rocker-crank
13	=	two equal pairs	III-5	double change point	S2X	parallelogram or deltoid
14	=	$L_1 = L_2 = L_3 = L_4$	III-6	triple change point	S3X	square

* SC = special case.

فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها



Barker's solution space for the fourbar linkage

- تمرینات و مسائل فصل ۳

1) تعداد درجات آزادی مفاصل زیر را با رسم شکل بیان نمایید.

a) Knee زانو

b) Ankle آرنج

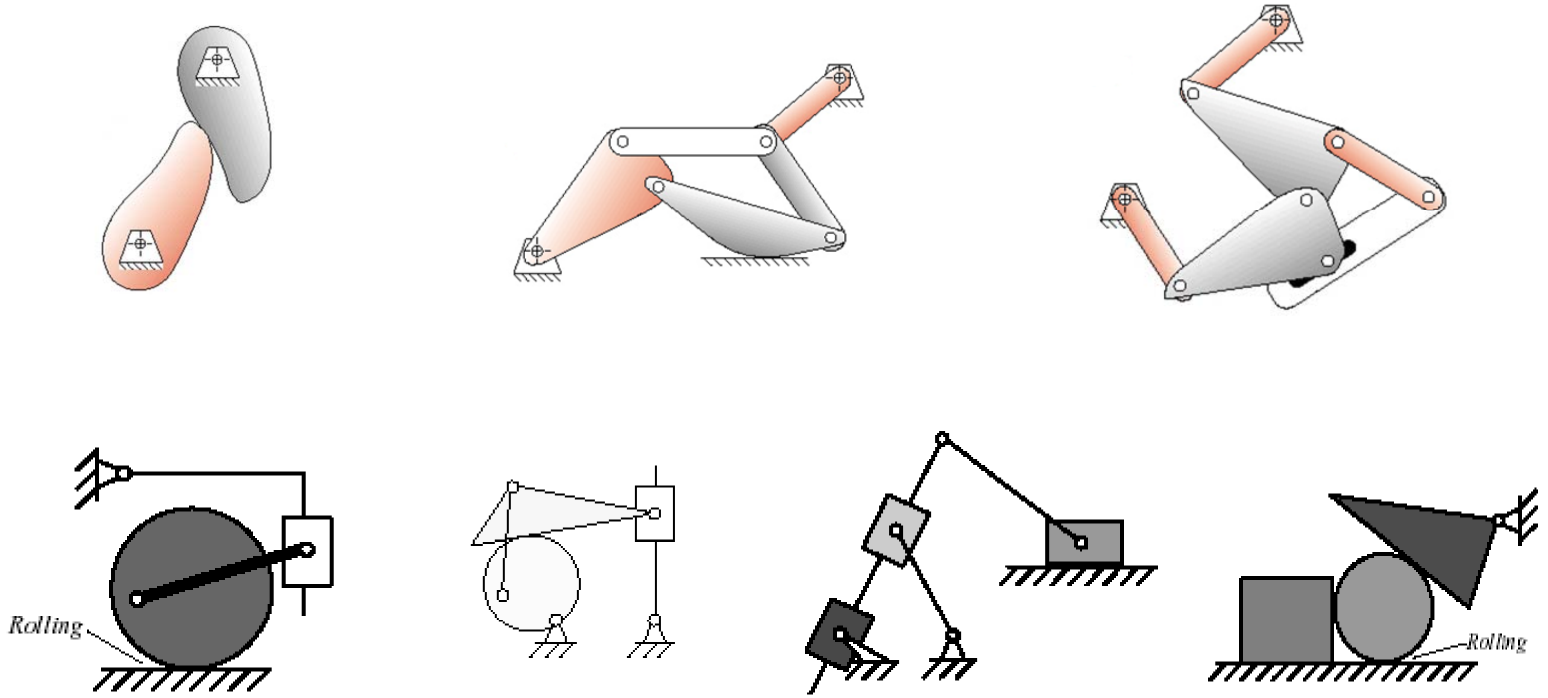
c) Shoulder شانه

2) ابتدا سه نوع از وسایل متداول زیر را پیدا کرده سپس دیاگرام سینماتیکی آنها را رسم نموده و تعداد درجات آزادی را بیان نمایید.

a) Automobile hood hinge mechanism

b) Folding ironing board

۳) درجه آزادی مکانیزمهای نشان داده شده را بدست آورید:



امتحان میان ترم ۸۲/۹/۹/

فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

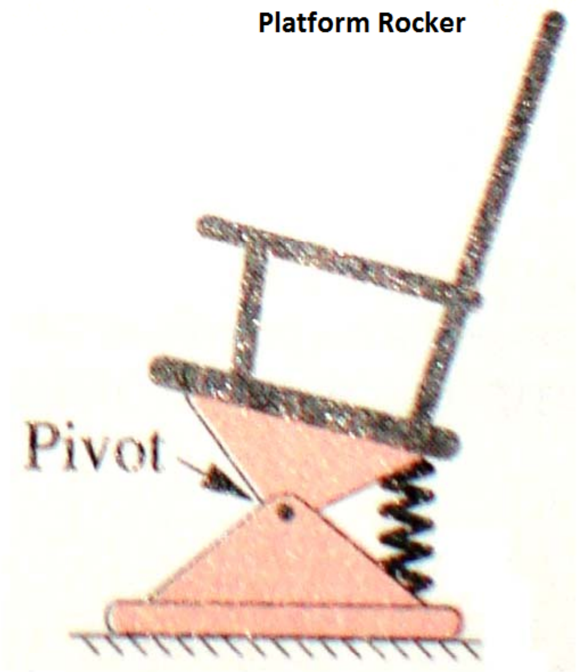
فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

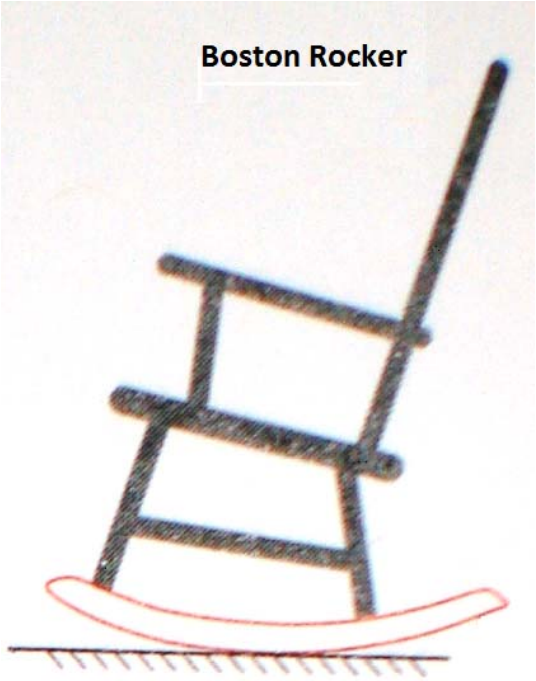
فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

فصل ۳   آشنائی با انواع مکانیزمها

فصل ۴
مراکز آنی
Instantaneous center





فصل ۴ مراکز آنی

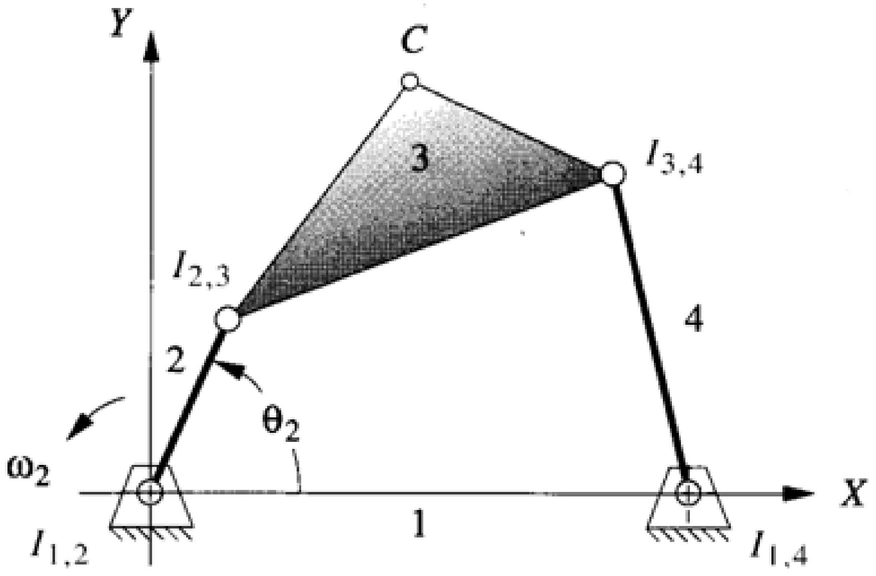
- در فصل بعدی چند روش تعیین سرعت اجزاء مکانیزمها ارائه خواهد شد.
- یکی از این روشها نیاز به تعریف **مراکز آنی** دارد.
- اهمیت سرعت
  - زمان انجام کار به آن بستگی دارد.
  - روی توان مصرفی موثر است.
  - برای توان معین نیروها و تنشهای داخلی یک مکانیزم را میتوان با افزایش سرعت کاهش داد.
  - اصطکاک و سایش به اجزاء ماشین به سرعت بستگی دارد.
  - علاوه بر این قبل از تحلیل شتاب اجزاء یک مکانیزم نیاز است که سرعتهای آنی اجزاء تعیین شود.
- مقادیر سرعتهای اجزاء یک مکانیزم بصورت لحظه ای تعیین می شوند.
- هربازوی که حرکت صفحه ای دارد، در آن لحظه حول یک نقطه دوران می کند.
- برخی از بازوها دارای مراکز دوران ثابت می باشند.
- برای برخی دیگر این مراکز در حال حرکت هستند.
- لغت مرکز آنی (Instant Center) به مرکز دوران یک جسم در یک لحظه خاص اطلاق می شود.

فصل ۴ مراکز آنی

- **تعریف مرکز آنی**
  - نقطه ای متعلق به یک جسم که جسم دیگر حول آن نقطه بصورت لحظه ای یا دائم دوران می کند.
  - نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت خطی یکسان است (اندازه و جهت سرعت یکسان).
  - هردو بیان فوق مهم است، زیرا از آنها در تعیین مراکز آنی استفاده خواهد شد.

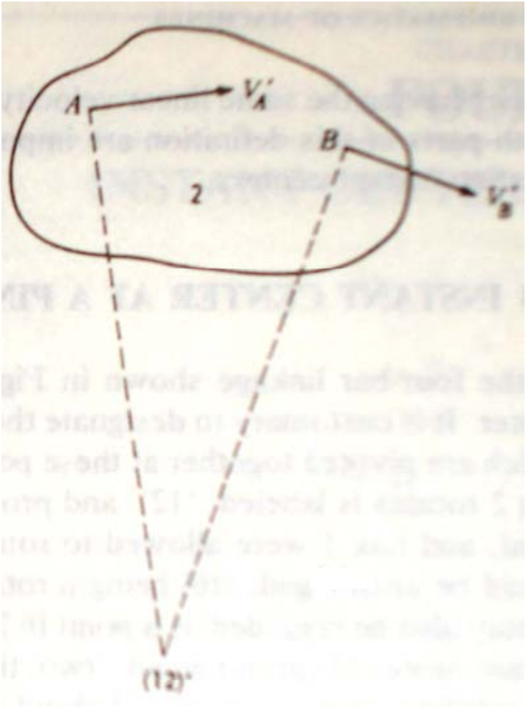
فصل ۴ مراکز آنی

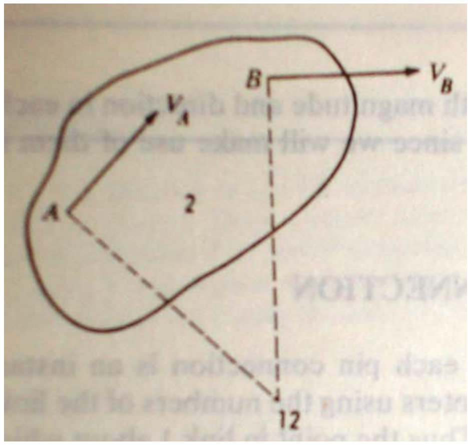
- **مرکز آنی در اتصال پین Revolute Joint**
  - اتصال پین در واقع نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت خطی یکسان است. لذا هر اتصال پین یک مرکز آنی است.
  - مرسوم است که مرکز آنی توسط شماره اجزاء آن مشخص شود.
  - در مکانیزم چهار میله:
    - $I_{1,2}$، $I_{1,4}$ مراکز آنی ثابت
    - $I_{2,3}$، $I_{3,4}$ مراکز آنی متحرک



فصل ۴ مراکز آنی

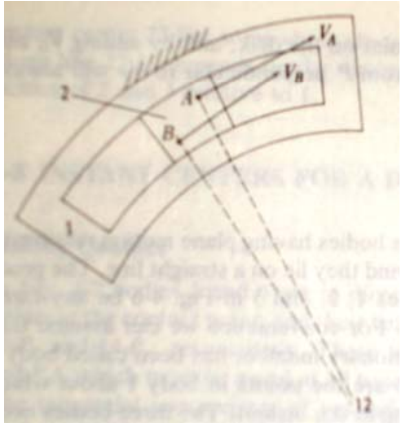
- مرکز آنی برای جسمی که راستای سرعت دو نقطه آن معلوم است:
  - هر دو جسمی که دارای حرکت نسبی باشند دارای مرکز آنی هستند.
  - جسم ۱ صفحه کاغذ و ثابت است.
  - راستای حرکت دو نقطه از جسم ۲ معین است.
  - نقطه تلاقی خطوط عمود بر راستای سرعت در نقاط A و B مرکز آنی را مشخص می کند.
  - اگر دو عمود در یک راستا قرار گیرند، چگونه مرکز آنی بدست می آید؟



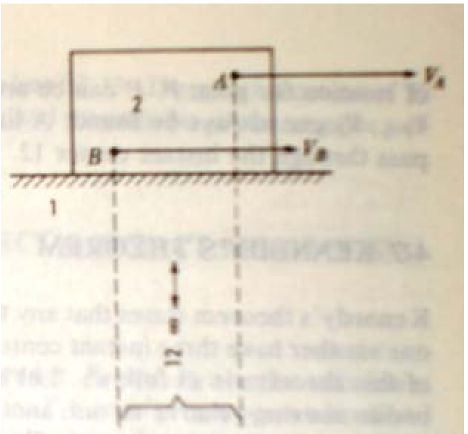


فصل ۴ مراکز آنی

- مرکز آنی برای جسم لغزشی (**Sliding Body**)
  - شیار دایره ای

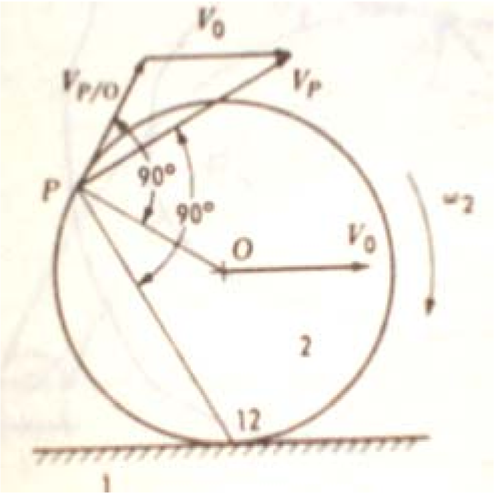


  - لغزنده روی سطح
    - حرکت مستقیم الخط حالت خاصی از دوران است.
    - مرکز دوران در راستای عمود بر حرکت در بینهایت قرار گرفته است.



فصل ۴ مراکز آنی

- مرکز آنی برای جسم غلتشی
  - دیسک ۲ بدون لغزش روی جسم ۱ می غلتد.
  - جسم ۱ می تواند ساکن یا متحرک باشد.
  - نقطه تماس مرکز آنی اجسام ۱ و۲ است.
  - مرکز آنی ۱۲ متعلق به جسم ۱ است که جسم ۲ در لحظه نشان داده شده حول آن دوران می کند.
  - سرعت نقطه ای روی محیط دیسک V_p



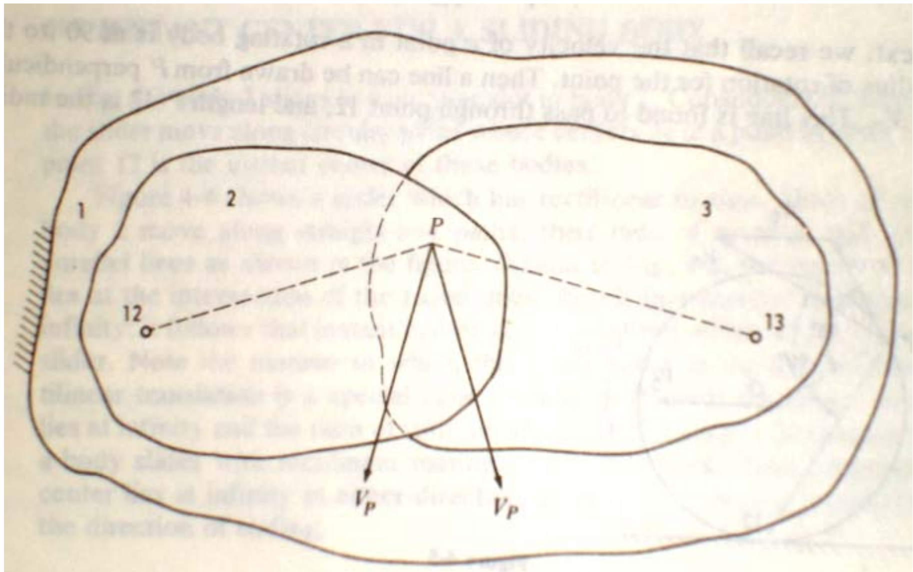
$$V_p = V_o + V_{p/o}$$

  - خطی که در نقطه P عمود بر V_p رسم شود از نقطه 12 خواهد گذشت.

فصل ۴ مراکز آنی

- تئوری کندی (**Kennedy's Theorem**)

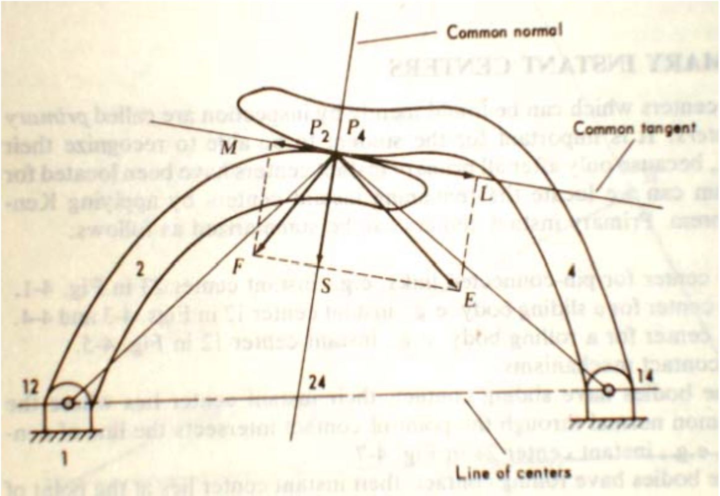
Any three bodies in plane motion will have exactly three instant centers, and ***they will lie on the same straight line.***



آیا در راستای I_{12} و I_{13} نقطه ای مشترک بین ۲ و ۳ می توان یافت که سرعت یکسانی داشته باشد.

فصل ۴ مراکز آنی

- مراکز آنی مکانیزم تماس مستقیم (direct contact mechanism)
  - تماس لغزشی
    - حر کت نسبی دو جسم ۲ و ۴ در نقطه تماس در امتداد مماس خواهد بود.
    - بنابر این مرکز آنی حرکت نسبی آنها در امتداد عمود مشترک در نقطه تماس خواهد بود.
    - از طرف دیگر تئوری کندی می گوید که مرکز آنی ۲۴ روی خط ۱۲-۱۴ قرار گرفته است

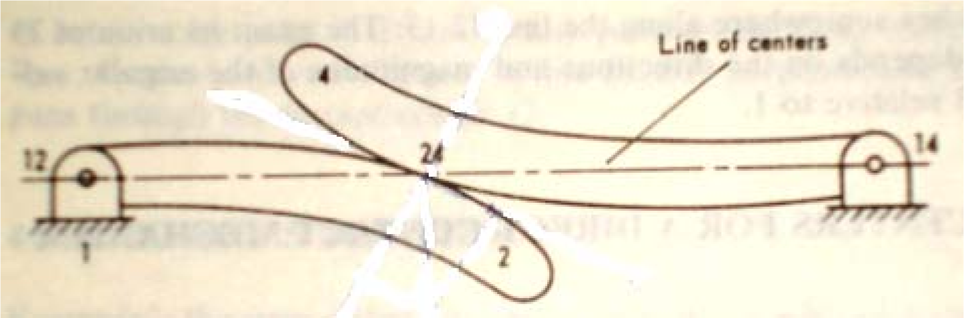


فصل ۴ مراکز آنی

- مراکز آنی مکانیزم تماس مستقیم (**direct contact mechanism**)

  – تماس غلتشی

    - در صورتی که نقطه تماس در روی خط مرکز قرار گیرد و سرعت نقاط $\mathbf{P_2}$ و $\mathbf{P_4}$ برابر خواهد بود.
    - از آنجائیکه مرکز آنی نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت یکسان باشد، نقطه تماس مرکز آنی خواهد بود.



فصل ۴ مراکز آنی

- **تعداد مراکز آنی یک مکانیزم**
  - هر دوجسمی از مکانیزم که حرکت نسبی داشته باشند دارای یک مرکز آنی مشترک می باشند.
  - بنابر این در یک مکانیزم تعداد مراکز آنی همه ترکیبات ممکن ۲ عضو از تعداد کل اعضا می باشد:

$$C = \frac{n(n-1)}{2}$$

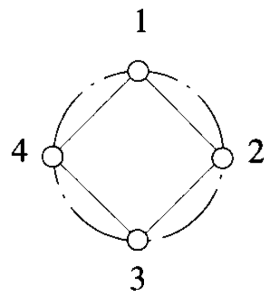
فصل ۴ مراکز آنی

- **مراکز آنی اولیه**
  - مراکز آنی که فقط با بررسی ابتدائی مکانیزم بدست می آیند.
  - بعد از تعیین کلیه مراکز آنی اولیه می توان با استفاده از تئوری کندی سایر مراکز آنی مکانیزم را بدست آورد.

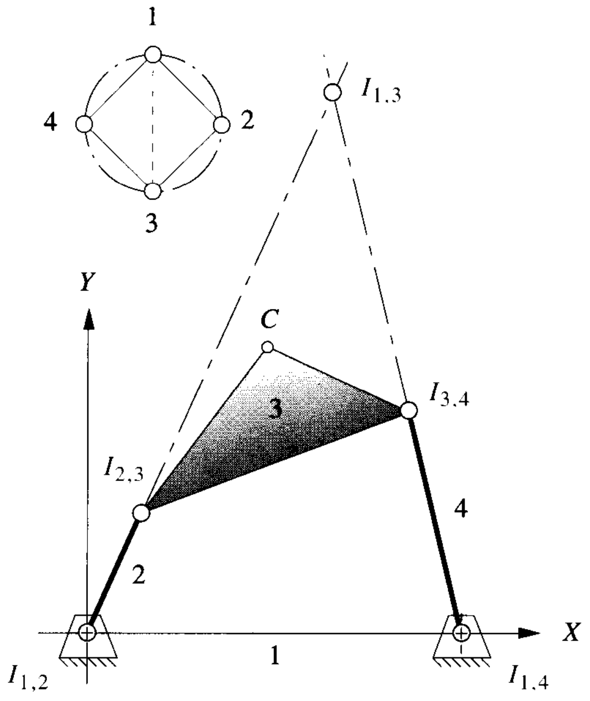
  - مراکز آنی اولیه بصورت زیر خلاصه می شوند:
    - **اجسامی که با اتصال پین (Revolute Joint) متصل شده اند.**
    - **مرکز آنی برای اجسام لغزشی(Prismatic Joint)**
    - **مرکز آنی برای اجسام غلتشی(Rolling Joint)**
    - **مکانیزم تماس مستقیم(Direct Contact Mechanism)**
      - **اجسامی که تماس لغزشی دارند(Rolling).**
      - **اجسامی که تماس غلتشی دارند(Sliding).**

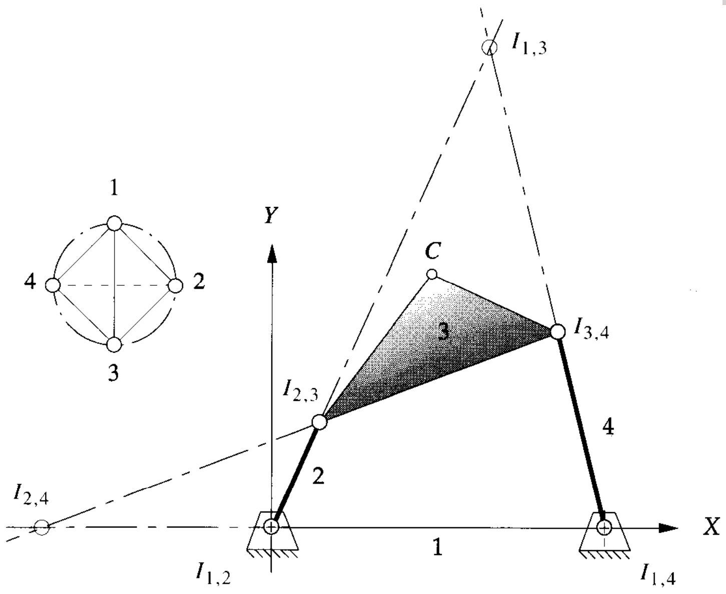
فصل ۴ مراکز آنی

- روش دیاگرام دایره ای
  - در یک مکانیزم ابتدا کلیه مرکز آنی ابتدائی معین می گردند
  - سپس با استفاده از تئوری کندی سایر سایر مراکز بدست می آیند
  - دیاگرام دایره ای روش ساده ای برای دنبال کردن و تعیین سایر مراکز آنی باقمانده است.



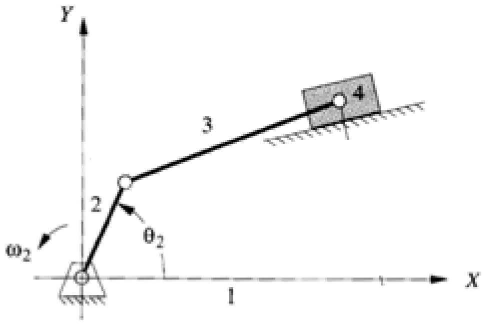
•هر عضو یک نقطه
•هر مرکز آنی یک خط
•تئوری کندی یک مثلث

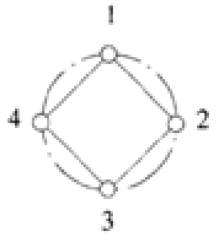


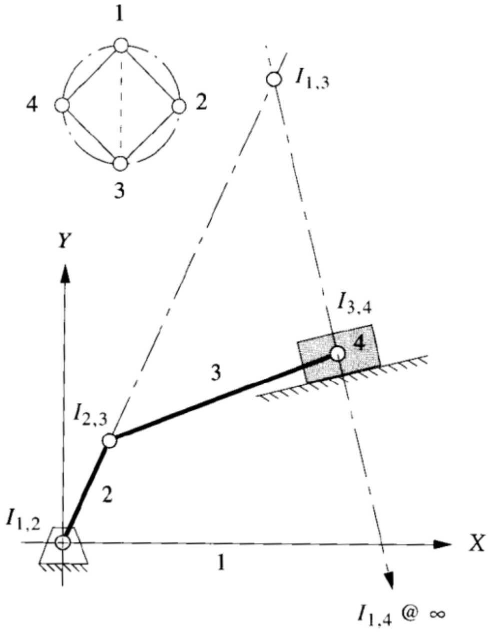


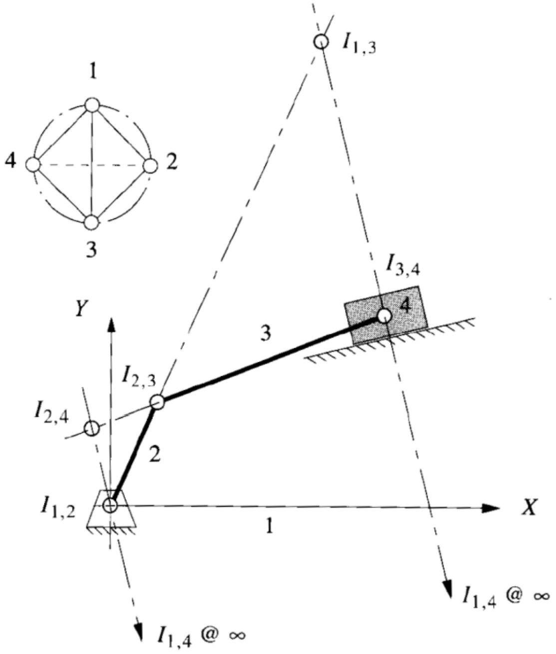
فصل ۴ مراکز آنی

- تعیین مراکز آنی لغزنده و لنگ
  - تعداد مراکز آنی ۶ = ۲ / (۳*۴)



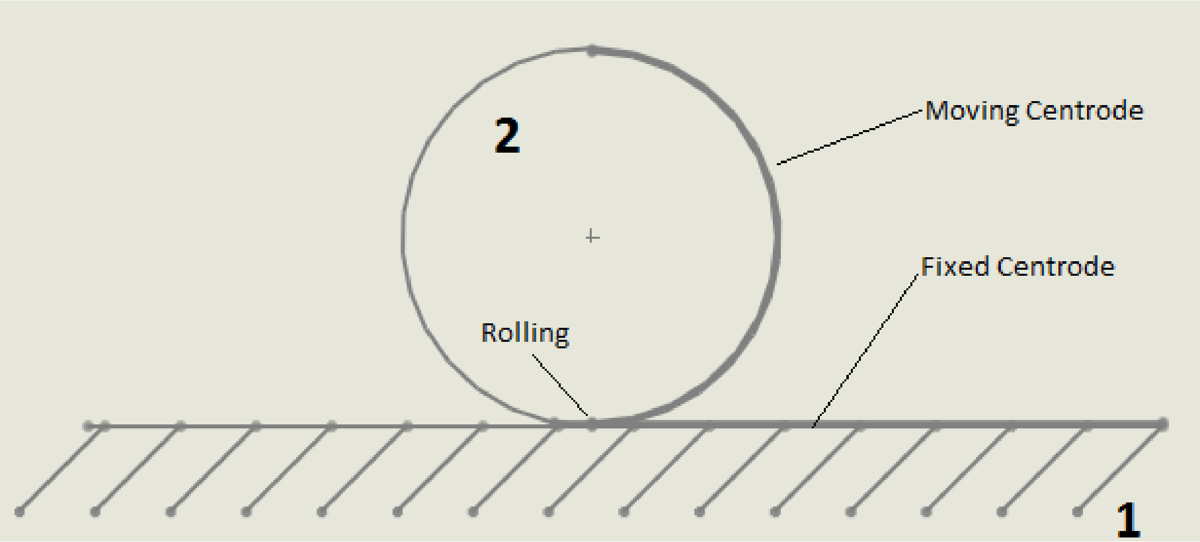






فصل ۴ مراکز آنی

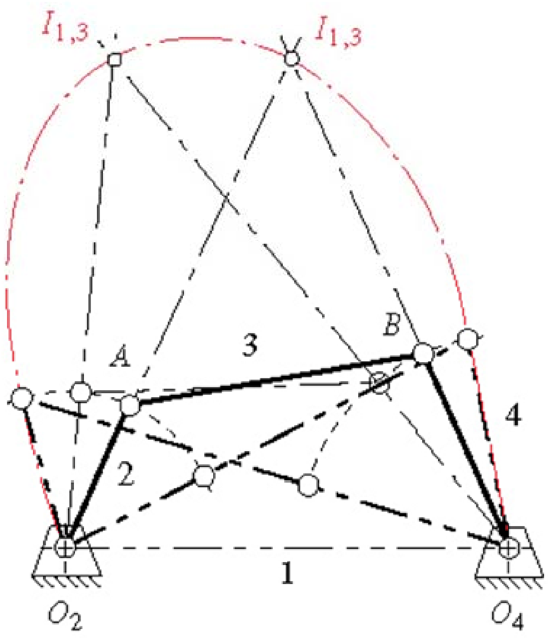
- موقعیتهای متوالی یک مرکز آنی مسیری را روی هریک از بازوها مشخص می نماید.
- این مسیر، یا مکان هندسی، مرکز آنی **Centrode** نامیده می شود.
  - در نظر بگیرید که دیسک ۲ در روی جسم ۱ در حال غلتش است.
  - مرکز آنی همیشه نقطه تماس است.



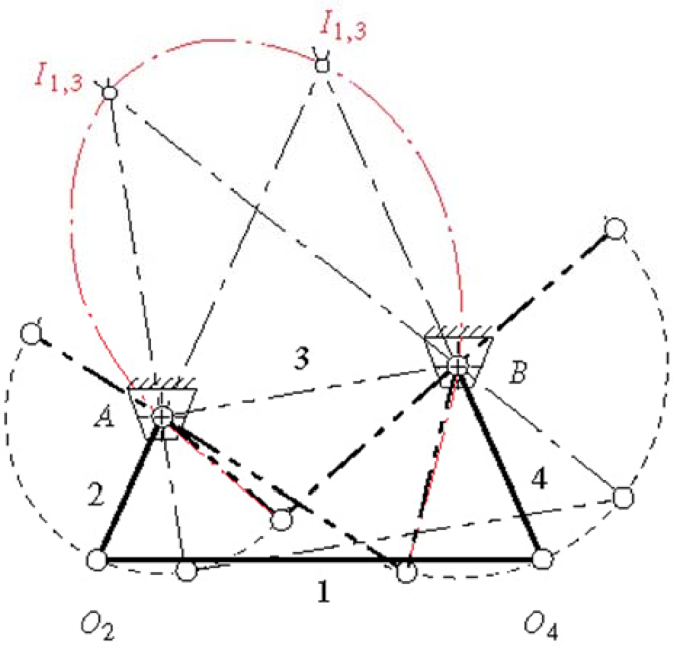
از آنجائیکه هر مرکز آنی در ارتباط با دو عضو است، هر مرکز آنی دو **Centrode** ایجاد می نماید.

فصل ۴ مراکز آنی

- مکانیزم چهار میله
  - I_{13} Centrode

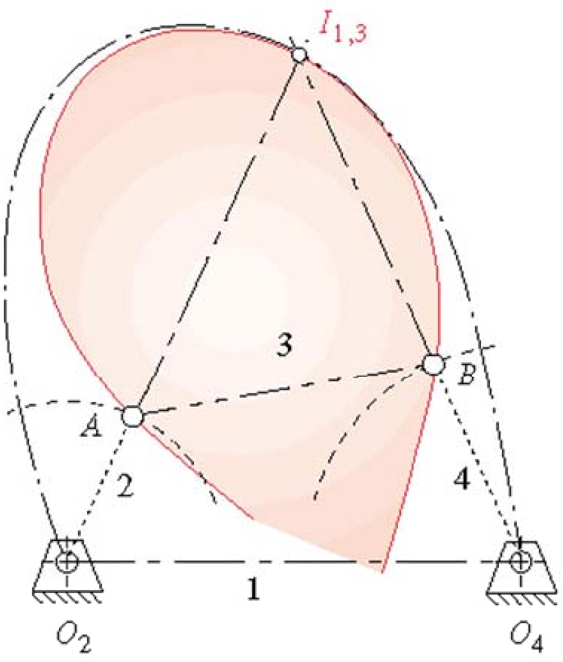


Centrode ثابت

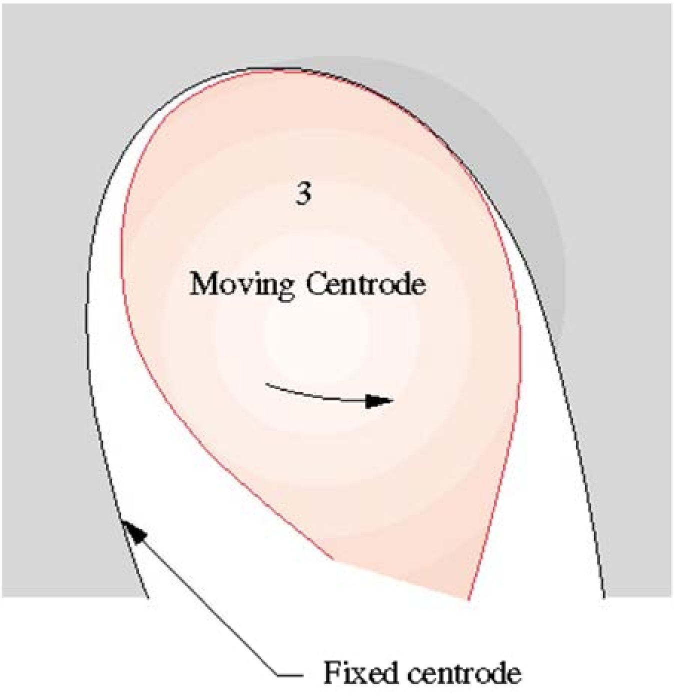


Centrode متحرک

فصل ۴ مراکز آنی



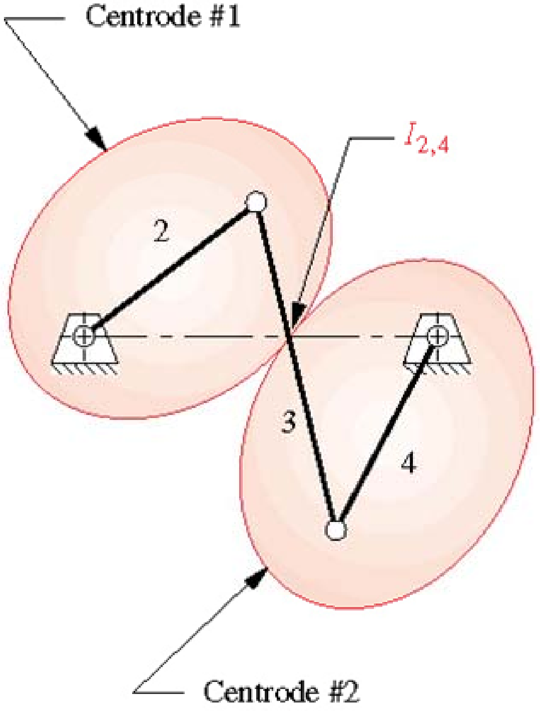
تماس Centrode ها



غلتش Centrode متحرک در مقابل Centrode ثابت، حرکت Coupler یکسان با مکانیزم اصلی ایجاد می کند

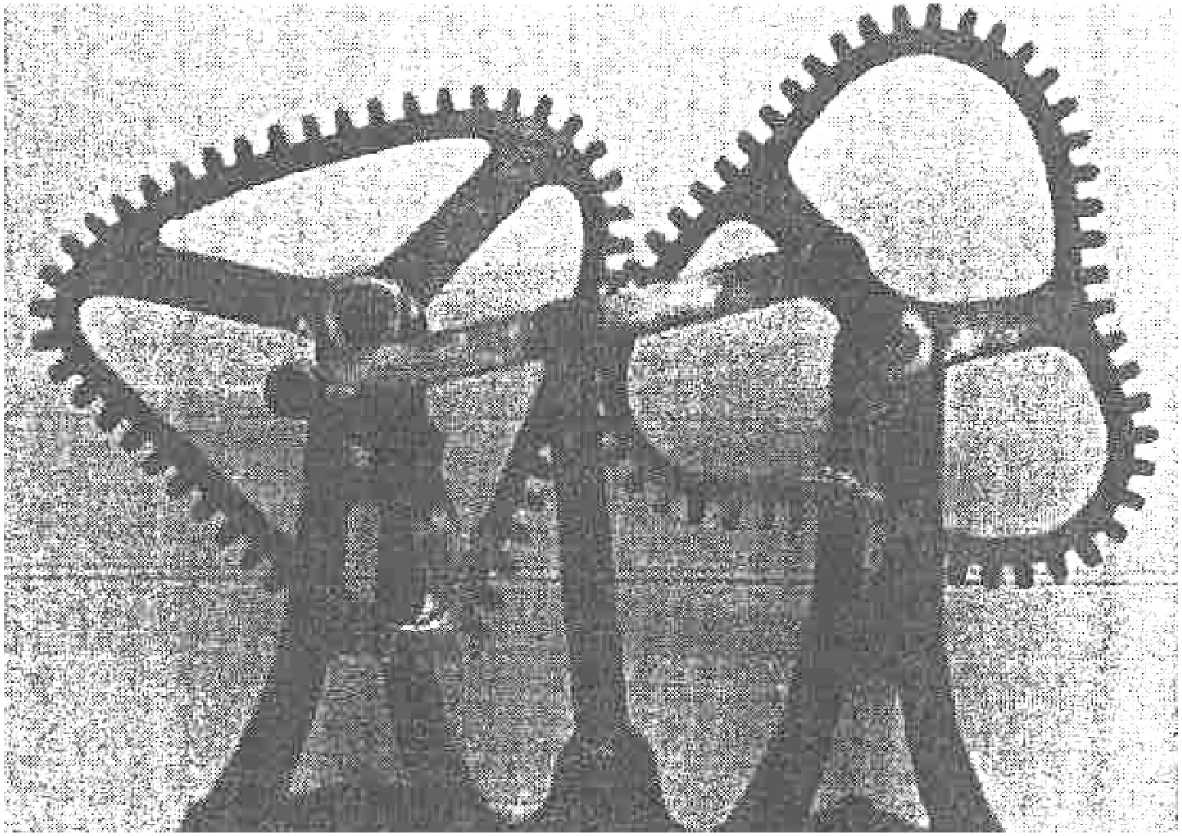
فصل ۴ مراکز آنی

- اگر بازوها توسط یک پین متصل شده باشند مانند $I_{1,2}$ ، $I_{1,4}$ ، $I_{2,3}$ ، $I_{3,4}$ در مکانیزم چهار میله، **Centrode** به یک نقطه در روی هر بازو کاهش می یابد.
- **Centrode** های مهم مربوط بازوهائی هستندکه مستقیما بهم متصل نشده اند.
- مسیر $I_{2,4}$ را برای چهار میله **Special Case Grashof** یا **Anti-parallelogram** در نظر بگیرید.



- مسیر روی اعضا ۲ و ۴ بیضی است.
- جهت اطمینان از عدم لغزش لازم است که دندانه روی **Centrode ها** در نظر گرفته شود.
- مکانیزم حاصل حرکت مشابه با مکانیزم چهارمیله **double crank** ایجاد می کند.
- در برخی از پرسهای چاپ لازم است که در کورس حرکت سرعت افزایش و سپس کاهش داشته باشد.

فصل ۴ مراکز آنی

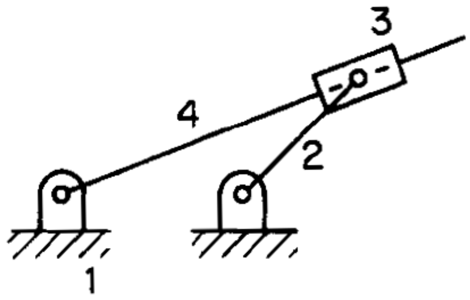


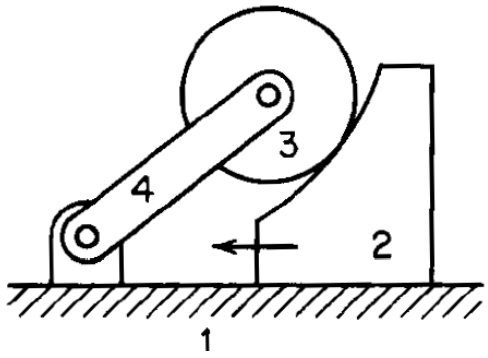
Six-bar linkage model with centrodes represented by noncircular gears.

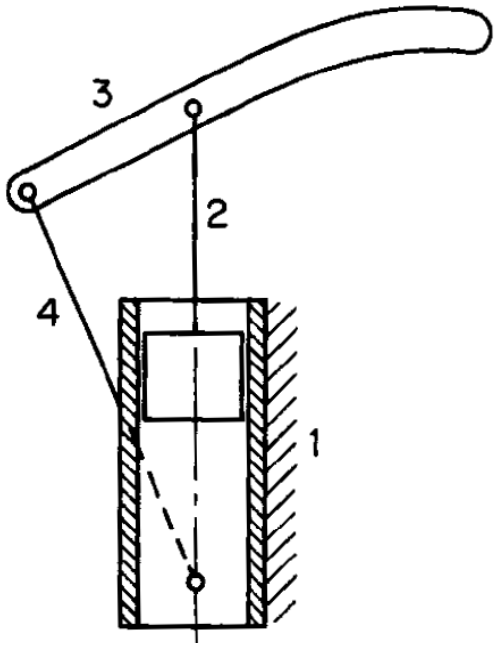
The gears roll on each other at the pitch points.

The pitch point is the instant center between the two frame-mounted cranks.

- حل چند مسئله

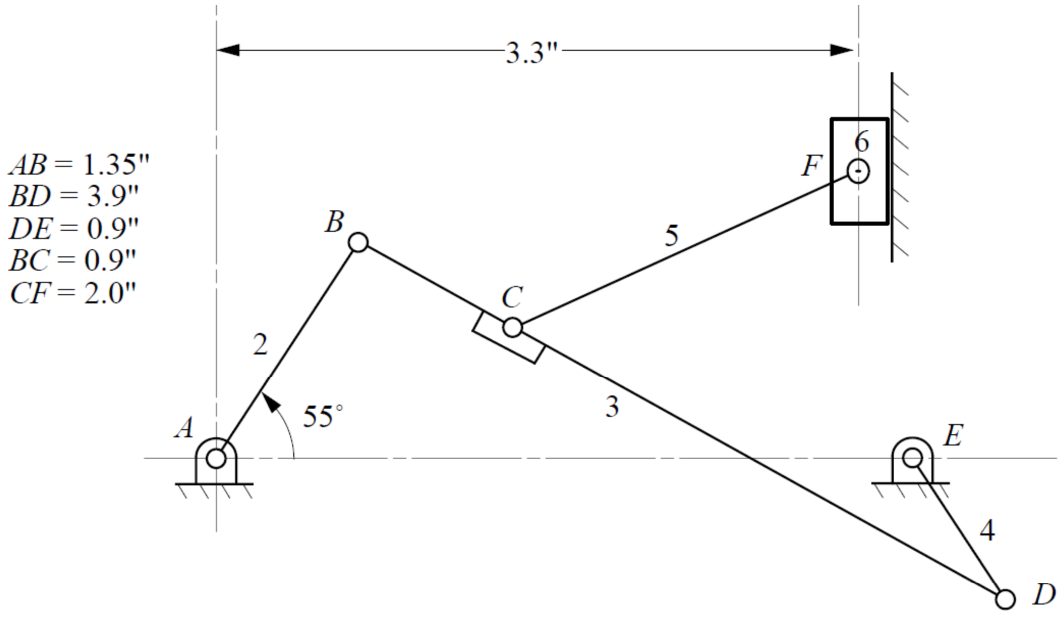




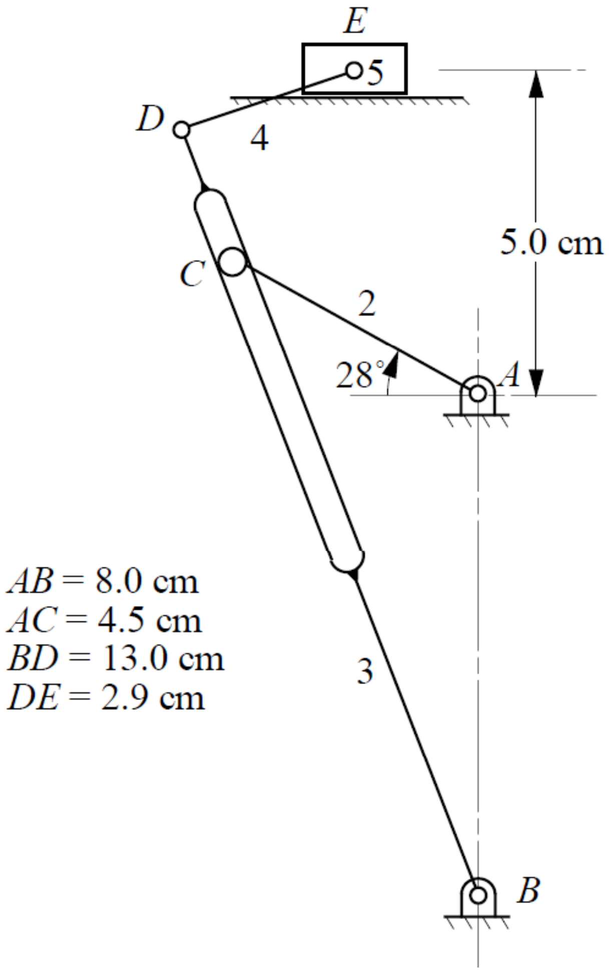


فصل ۴ مراکز آنی

- مسئله **4-3** از کتاب Waldron



- مسئله **4-4** از کتاب Waldron

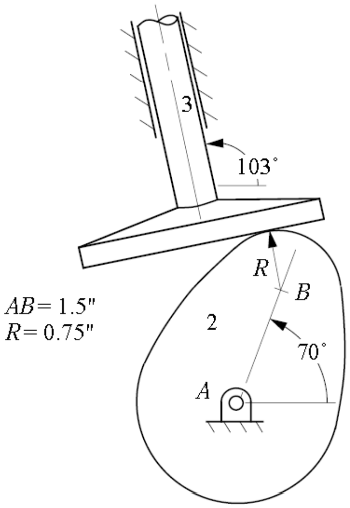


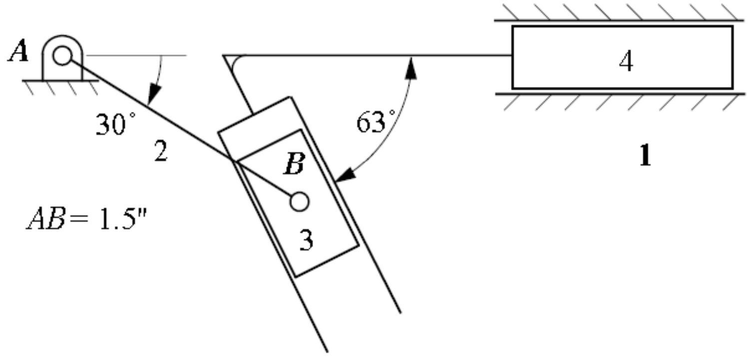
فصل ۴ مراکز آنی

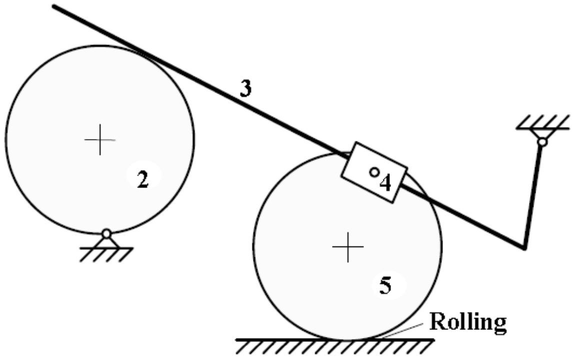
تمرینات و مسائل فصل ۴

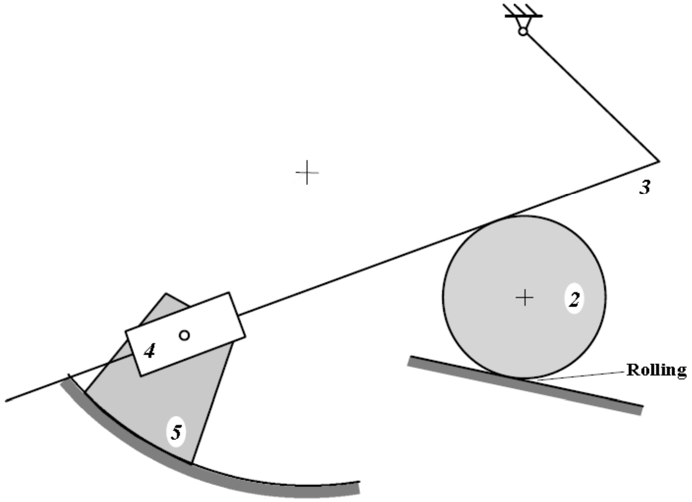
۱- صحت تئوری کندی را بررسی نمایید.

۲- تمامی مراکز آنی مکانیزمهای زیر را بدست آورید.



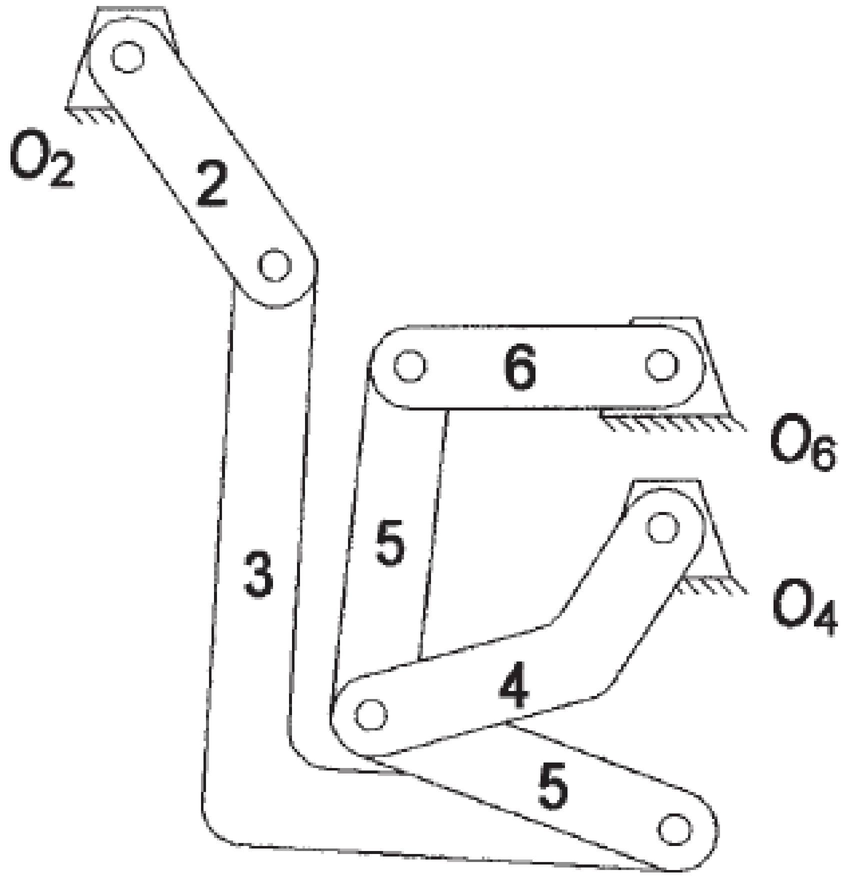






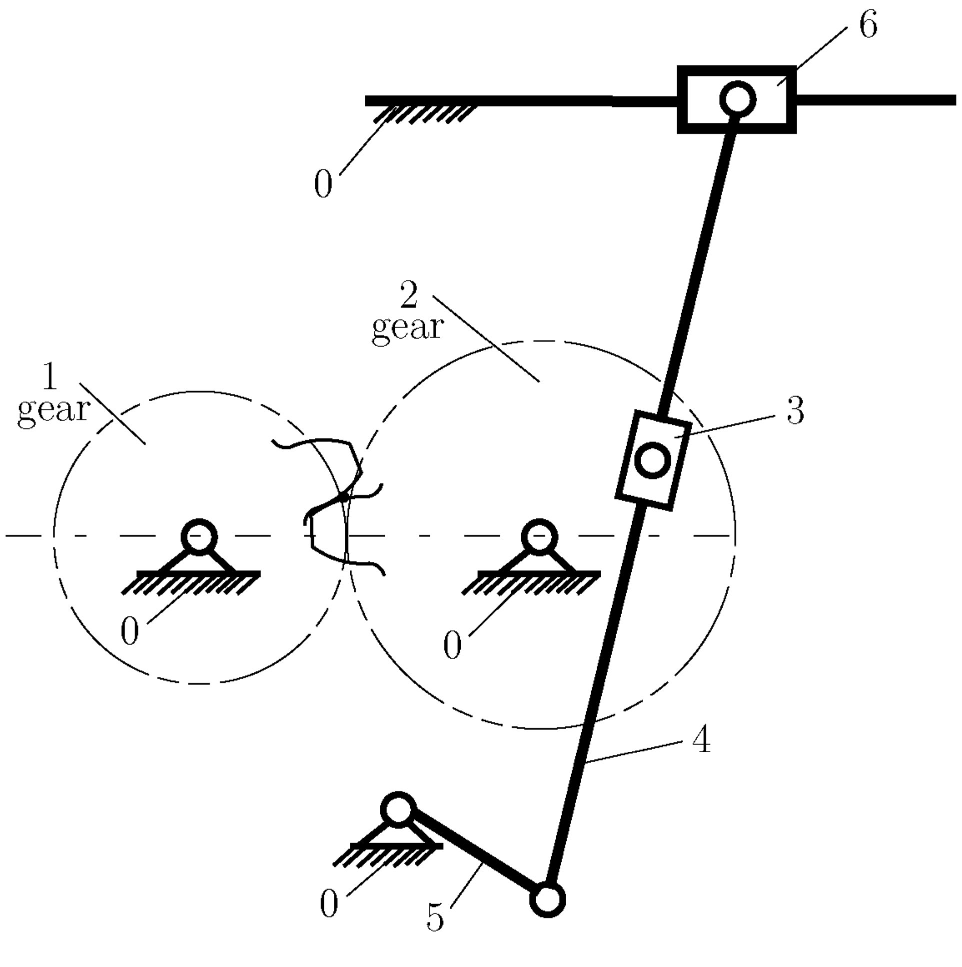
فصل ۴ مراکز آنی

تمرینات و مسائل فصل ۴



فصل ۴ مراکز آنی

تمرینات و مسائل فصل ۴



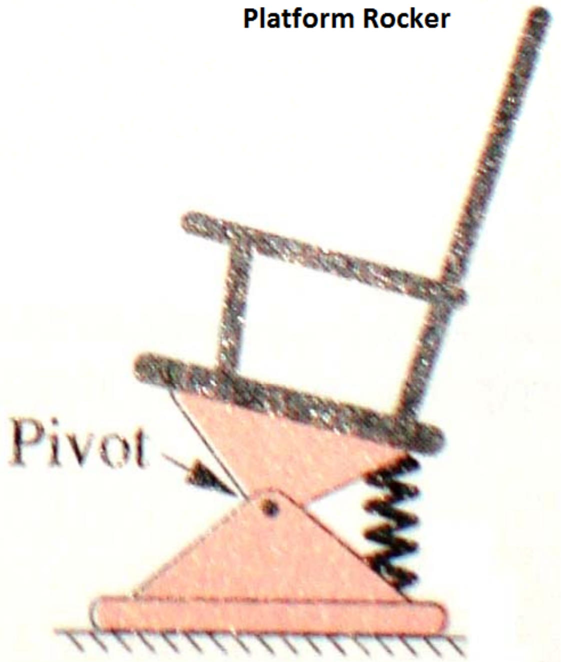
فصل ۴ مراکز آنی

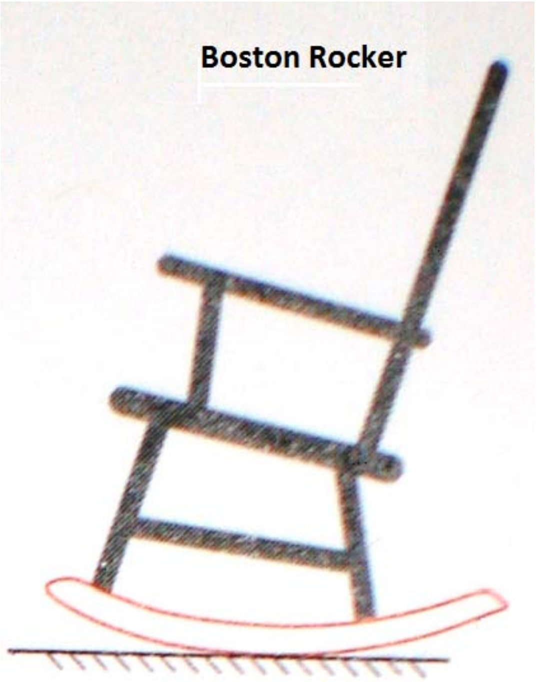
تمرینات و مسائل فصل ۴

۳- صندلی Boston Rocker دارای کفی منحنی شکل در مقابل زمین است، در حالیکه صندلی Platform Rocker به زمین پین شده است.

a) کدام صندلی راحت تر و آرامش بیشتری دارد؟ چرا؟

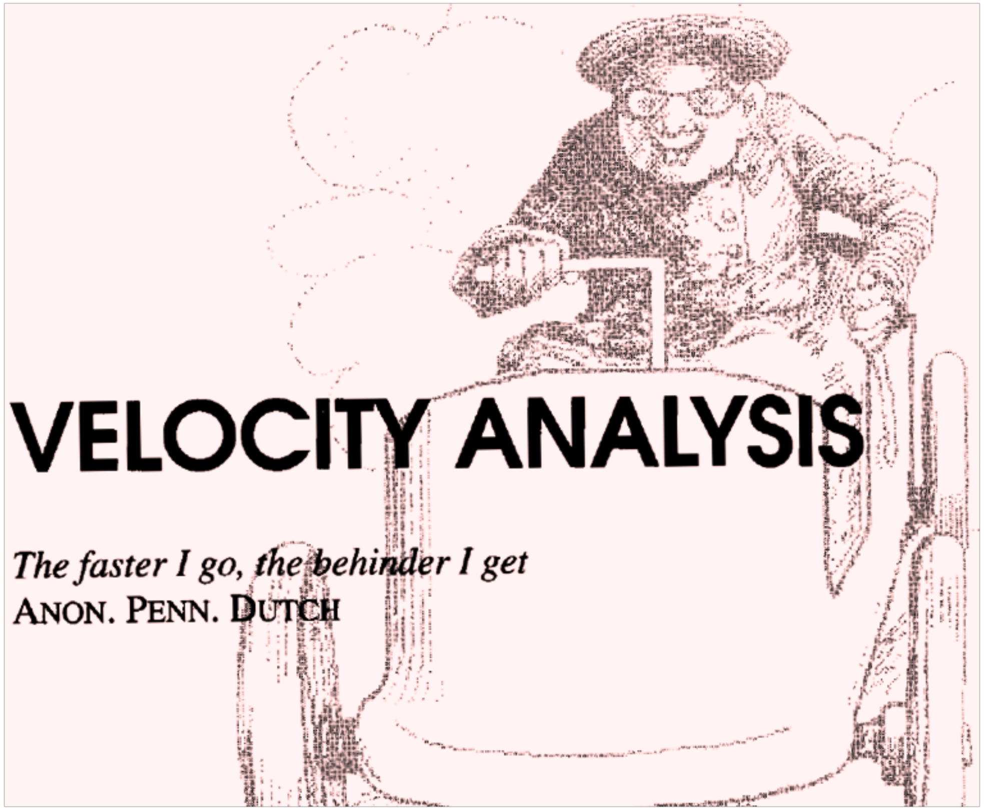
b) منحنی کف چگونه بدست آمده است؟





پایان فصل ۴

فصل ۵   سرعت در مکانیزمها



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

۱- تعیین سرعت توسط مراکز آنی

۲- تعیین سرعت با استفاده از مولفه های آن

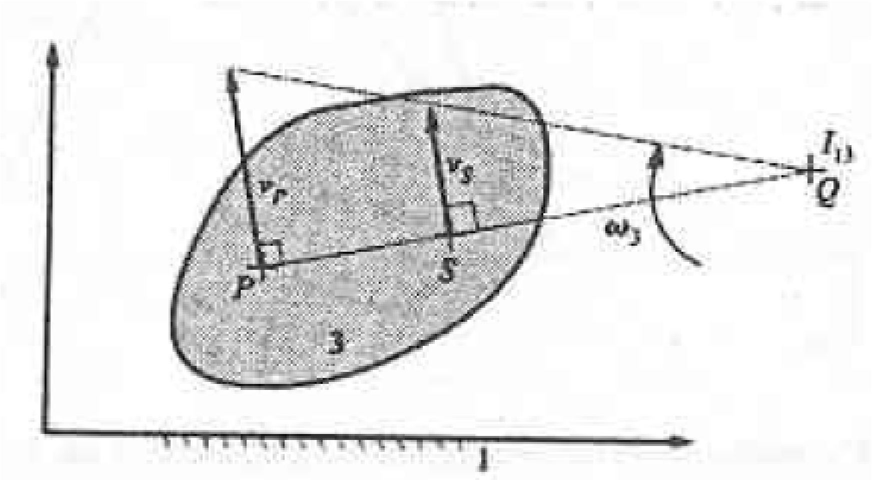
۳- روش سرعتهای نسبی

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- تعیین سرعت توسط مراکز آنی

اصول کلی زیر باید رعایت گردد:

۱. اندازه سرعت خطی نقاط روی جسم دورانی نسبت مستقیم با شعاع دوران دارد.
۲. سرعت در راستای عمود بر شعاع دوران آن نقطه است.
۳. مرکز آنی نقطه ای مشترک بین دوجسم است که دارای سرعت خطی یکسان (مقدار و راستا) می باشد.

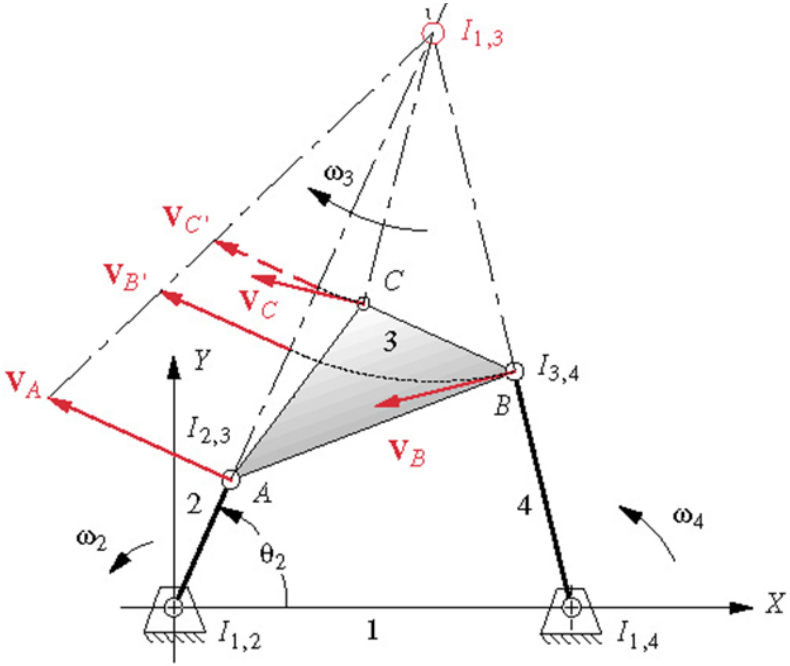


فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

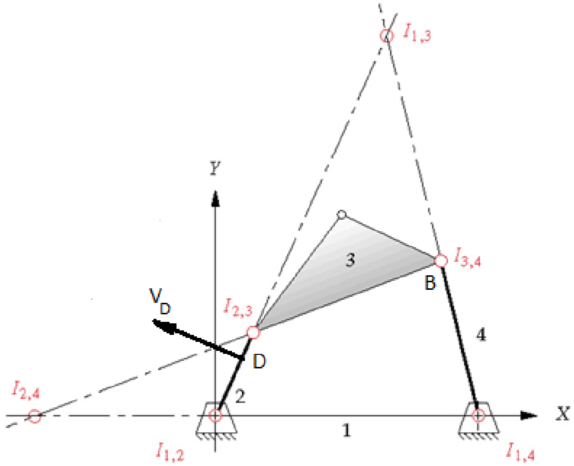
- **سرعت در مکانیزم چهار میله**

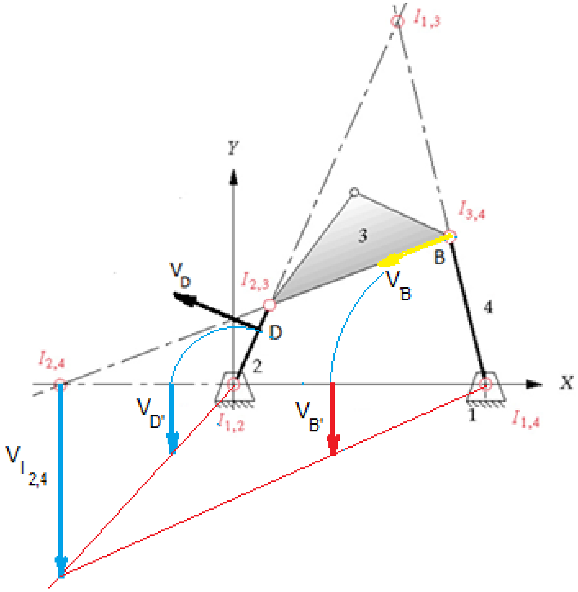
روش شعاع دوران

- در مکانیزم مقابل در نظر بگیرید که سرعت نقطه A معلوم و سرعت خطی نقاط B و C مورد نظر ا ست.
- ابتدا مراکز آنی لازم بدست می آیند.
- از مرکز آنی ۱۳ استفاده می شود.
- سرعت مرکز آنی ۱۳ صفر است.
- در این لحظه عضو ۳ حول ۱۳ دوران مرکز کند.
- با استفاده از تناسب سرعت و شعاع دوران سرعت نقاط B و C بصورت ترسیمی بدست می آید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها





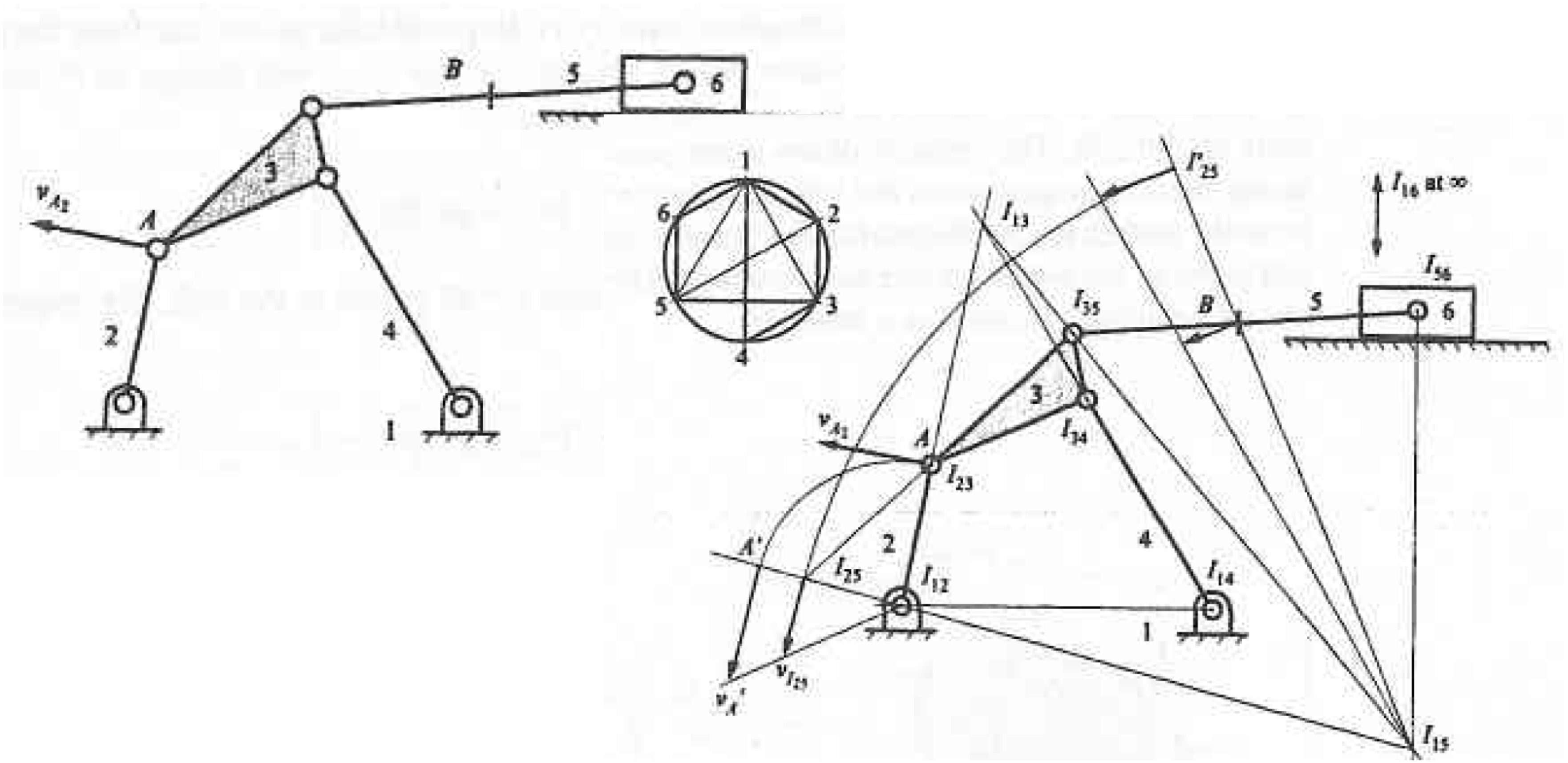
- سرعت در مکانیزم چهار میله

  روش شعاع دوران با استفاده از مرکز آنی ۲۴

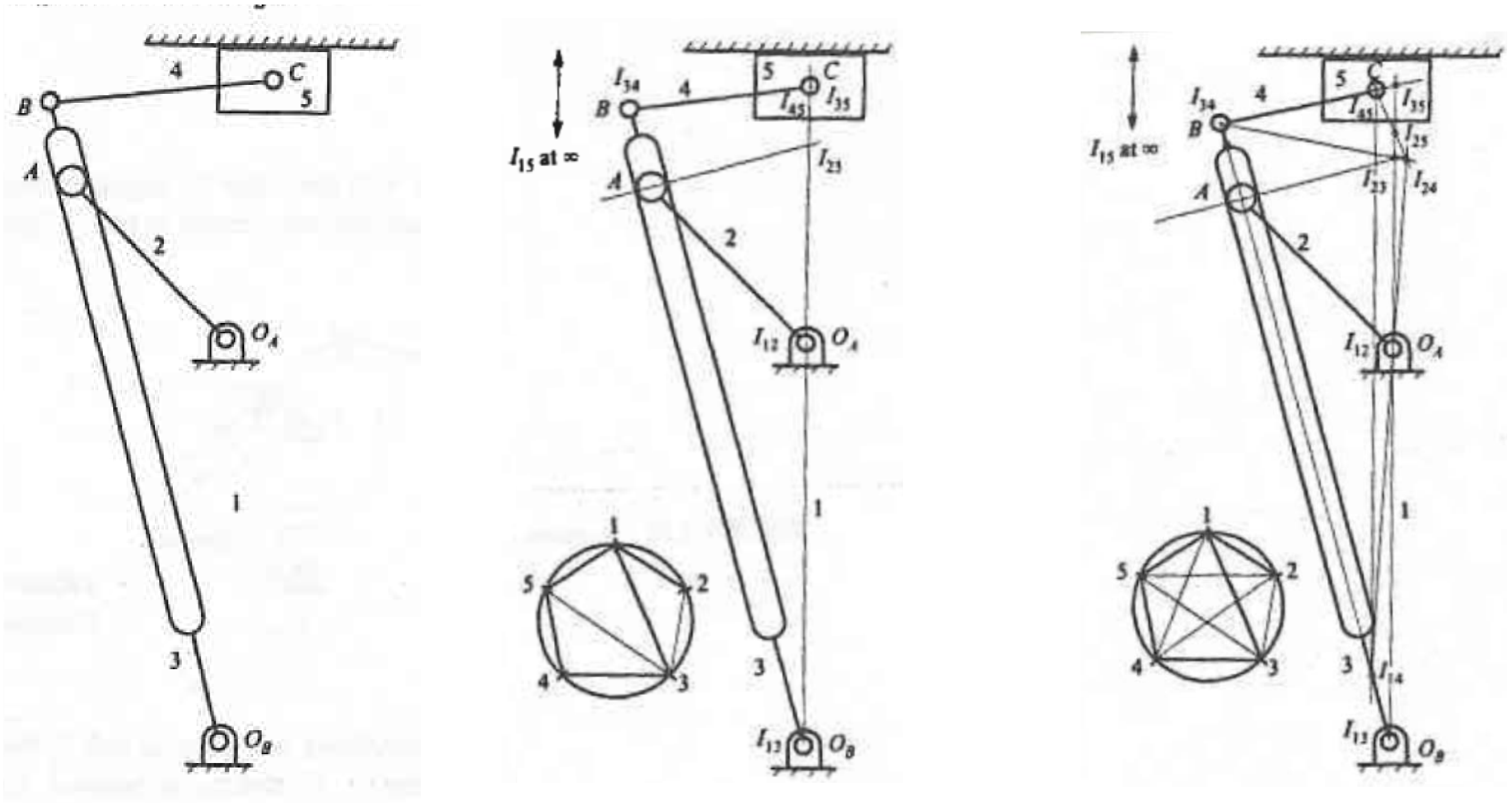
  - سرعت نقطه D داده شده سرعت نقطه B رابدست آورید.

- توجه نمایید که دو نقطه مورد نظر باید روی یک جسم قرار گرفته باشند.
- در مثال اول نقطه ۱۳ به عنوان نقطه انتقال حرکت و در و در مثال دوم نقطه ۲۴ (نقطه مشترک بین عضو ۲ و ۴) به عنوان نقطه انتقال حرکت انتخاب شده است.
- توجه روی انتخاب نقطه انتقال حرکت (Transfer Point)

- **مثال دیگر**
  - در مکانیزم مرکب سرعت نقطه A داده شده، سرعت نقطه B را بدست آورید.



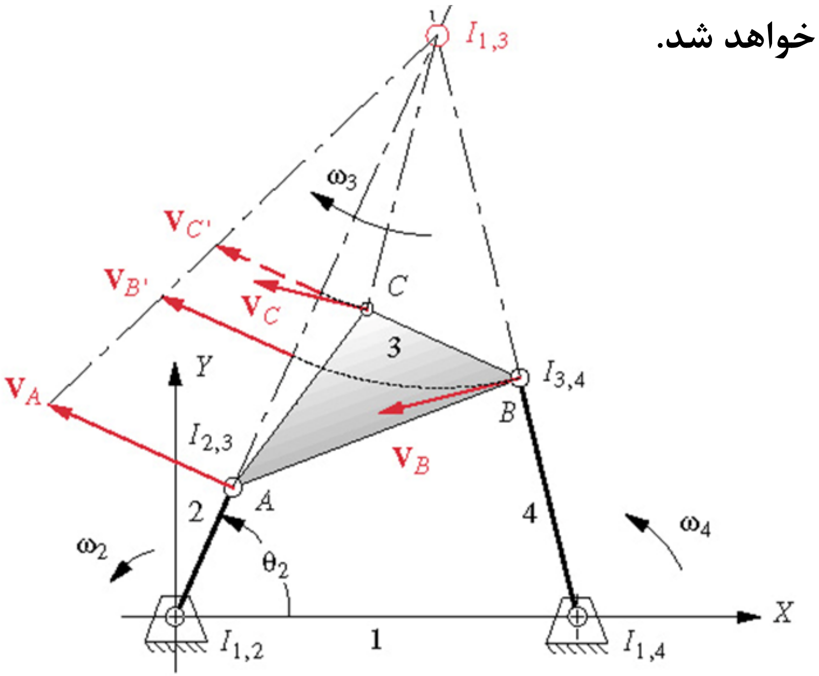
- **مثال دیگر**
  - در مکانیزم بازگشت سریع سرعت زاویه ای عضو ۲داده شده، سرعت نقطه C را بدست آورید.



- سرعت زاویه ای
  - پس از بدست آوردن سرعت نقطه از عضو مورد نظر و داشتن مرکز آنی آن عضو نسبت به زمین می توان سرعت زاویه ای عضو را محاسبه نمود:

$$\omega = \frac{V}{R}$$

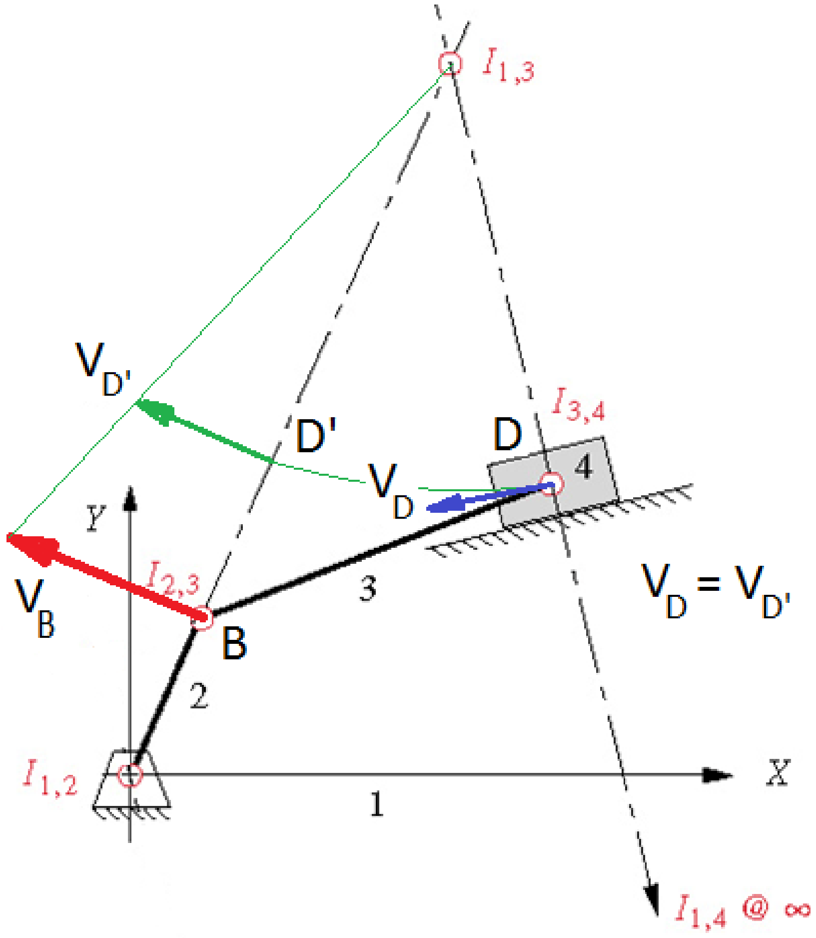
  - از جهت سرعت نسبت به مرکز آنی جهت دوران تعیین خواهد شد.
  - در شکل مقابل



$$\omega_4 = \frac{V_B}{I_{14}I_{34}}$$

$$\omega_3 = \frac{V_B}{I_{13}I_{34}}$$

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها



- سرعت در مکانیزم لغزنده و لنگ

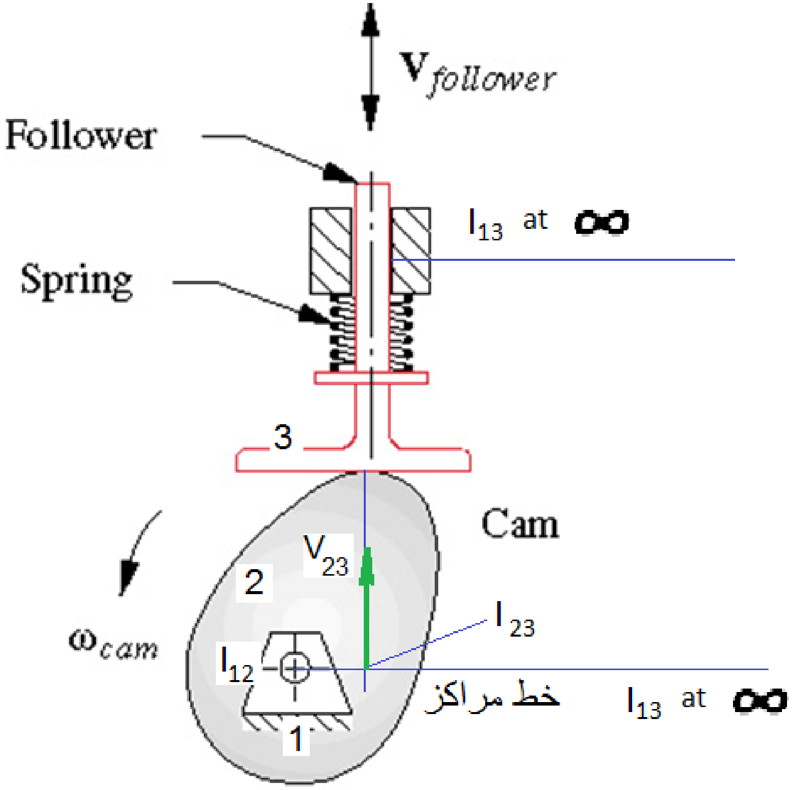
روش شعاع دوران

- در مکانیزم مقابل در نظر بگیرید که سرعت نقطه B معلوم و سرعت خطی نقطه D مورد نظر ا ست.
- ابتدا مراکز آنی لازم بدست می آیند.
- از مرکز آنی ۱۳ استفاده می شود.
- سرعت مرکز آنی ۱۳ صفر است.
- در این لحظه عضو ۳ حول مرکز ۱۳ دوران کند.
- با استفاده از تناسب سرعت و شعاع دوران سرعت نقاط D' و D بصورت ترسیمی بدست می آید.

- سرعت در مکانیزم بادامکی
  - سرعت زاویه ای بادامک داده شده
  - مکانیزم از نوع تماس مستقیم لغزشی
  - ابتدا مراکز آنی بدست آمده
  - سپس سرعت سرعت مرکز آنی I_{23} بدست می آید

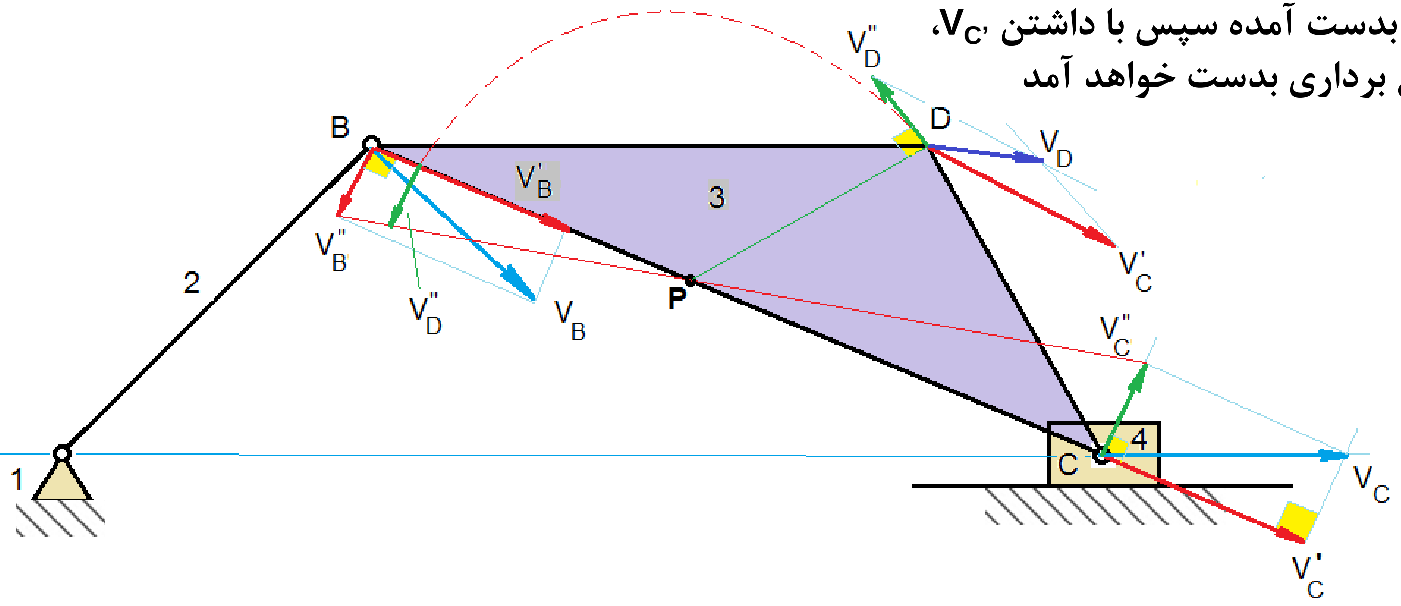
$$V_{23} = R\omega = (I_{12}I_{23})\omega_{cam}$$

- چرا راستای لغزش عضو ۳ و سرعت I_{23} یکسان است؟



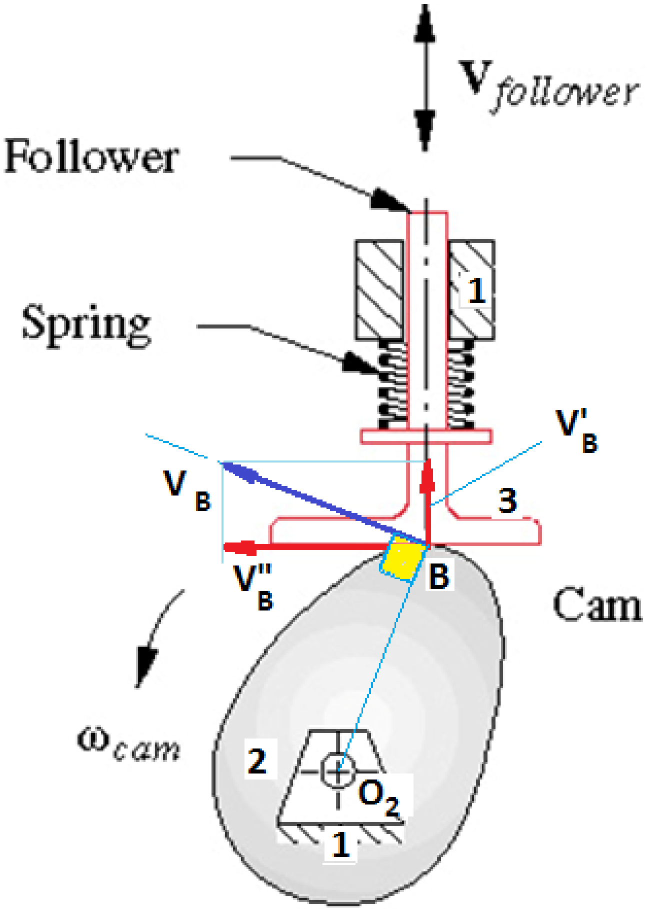
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- سرعت از روش مولفه ها
  - سرعت اجزا می توانند از روش تجزیه بردارهای سرعت به مولفه های مناسب تحلیل شوند.
  - در مثال زیر سرعت نقطه B معلوم و سرعت لغرنده و نقطه D مورد نیاز است.
  - V_B به دو مولفه $V_{B'}$ و $V_{B''}$ تجزیه می شود.
  - سرعت نقطه C در راستای BC برابر $V_{B'} = V_{C'}$
  - توجه نمایید که سرعت V_C از روی مولفه آن $V_{C'}$ بدست می آید.
  - نقطه P چه خاصیتی دارد؟
  - ابتدا سرعت $V_{D''}$ بدست آمده سپس با داشتن $V_{C'}$، V_D از روش جمع برداری بدست خواهد آمد



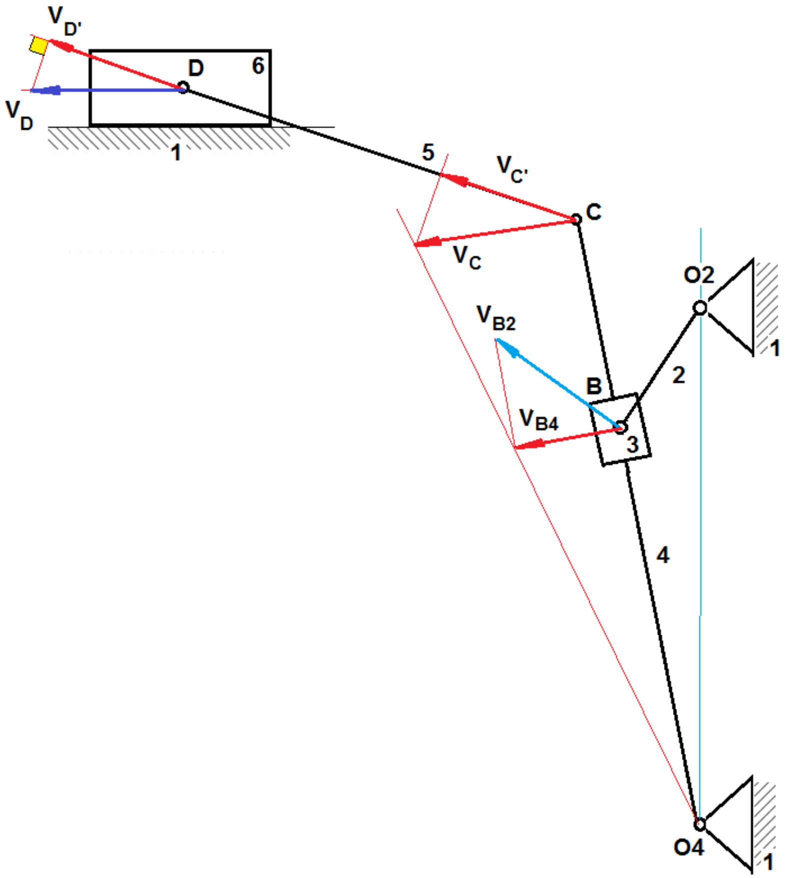
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- سرعت از روش مولفه ها
  - در مثال زیر سرعت نقطه B روی بادامک معلوم است و سرعت دنبال کننده ۳ مورد نیاز است.
  - ابتدا V_B به دو مولفه $V_{B'}$ و $V_{B''}$ تجزیه می شود.
  - از آنجائیکه کلیه نقاط روی ۳ حرکت مستقم الخط دارند، $V_{B'}$ سرعت عضو ۳ خواهد بود.
  - مولفه $V_{B''}$ در امتداد سطح دنبال کننده سرعت لغزش خواهد بود.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- سرعت از روش مولفه ها
  - سرعت زاویه ای عضو ۲ داده شده از روش مولفه های سرعت، سرعت خطی نقطه D را بدست آورید.
  - V_{B4} مولفه ای از V_{B2} می باشد.
  - از آنجائیکه B_4 متعلق به عضو ۴ می باشد، سرعت آن عمود بر O_4B_4 می باشد و از روی تناسب V_C بدست می آید.
  - ادامه دهید.



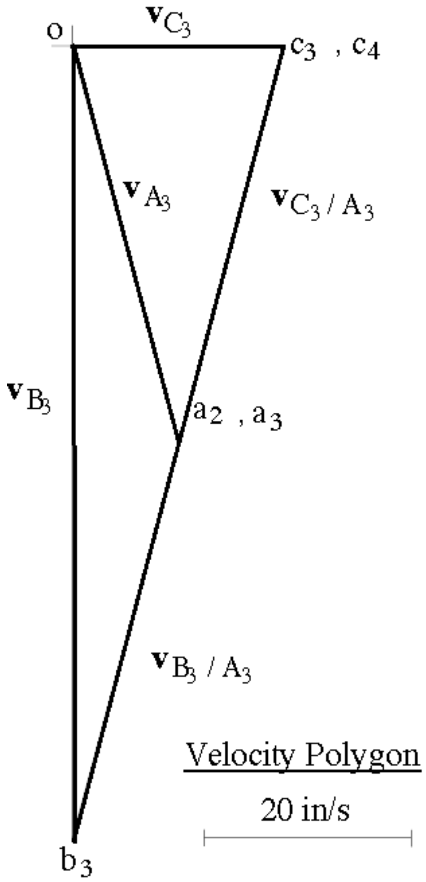
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

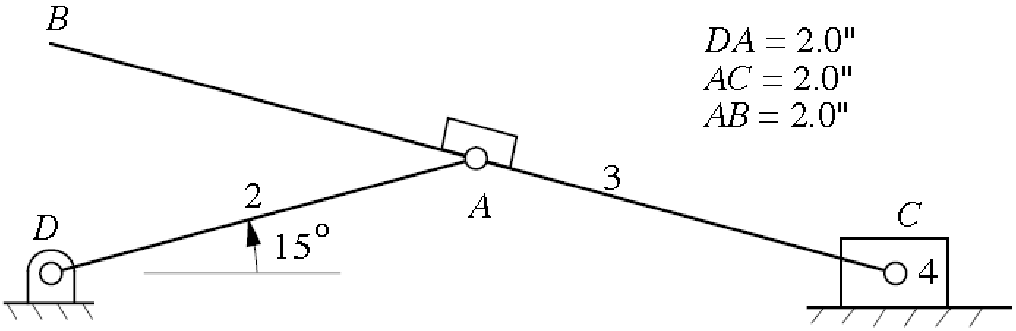
- **روش سرعتهای نسبی**
  - قبل از تحلیل شتاب مکانیزم باید "سرعتهای نسبی" تعیین شده باشند.
  - در نظر بگیرید که سرعت زاویه ای لنگ داده شده باشد، و سرعت پیستون و نقطه **B** مورد نظر باشد.

$$V_A = R\,\omega = DA\,\omega_2$$

$$V_C = V_A + V_{C/A}$$

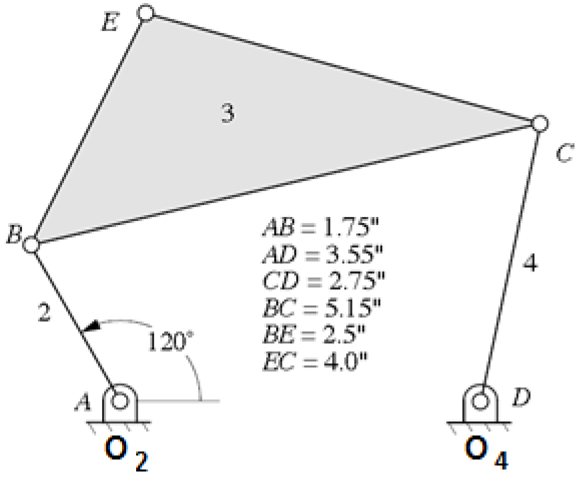
  - در رابطه برداری هر کمیت دارای مقدار و راستا می باشد.
  - و در هر رابطه برداری دو مجهول قابل محاسبه است.
  - ادامه دهید.

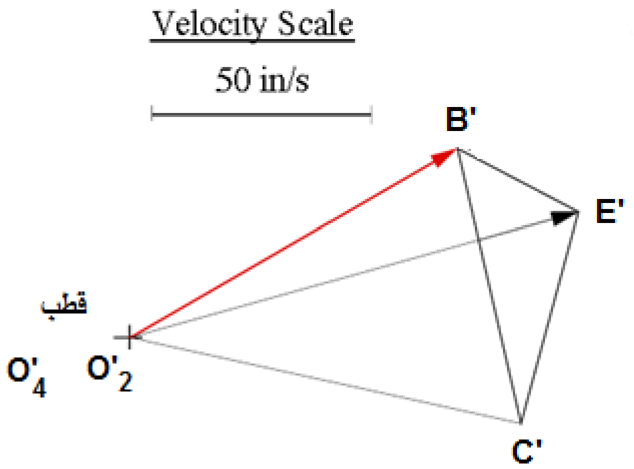




فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- **روش سرعتهای نسبی**
  - چند ضلعی سرعت (**Velocity Polygon**)
  - قطب نشان دهنده تمام نقاطی در روی مکانیزم است که سرعت صفر دارند. سرعتهای مطلق از این نقطه رسم می شوند.
  - چند ضلعی سرعت با رعایت مقیاس رسم می شود و کلیه نقاط مکانیزم در آن با پریم نمایش داده می شوند.
  - حل شامل دو مرحله نوشتن معادلات برداری و ترسیم چند ضلعی سرعت می باشد.
  - در مکانیزم چهار میله زیر سرعت زاویه ای میله ۲ معلوم، سرعت خطی نقاط **C** و **E** را بدست آورید.





$$V_B = R\,\omega = AB\,\omega_2$$

$$V_C = V_B + V_{C/B}$$

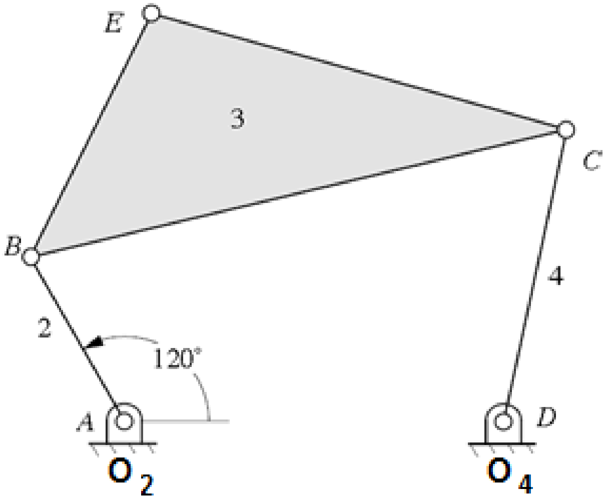
$$V_E = V_B + V_{E/B}$$

$$V_E = V_C + V_{E/C}$$

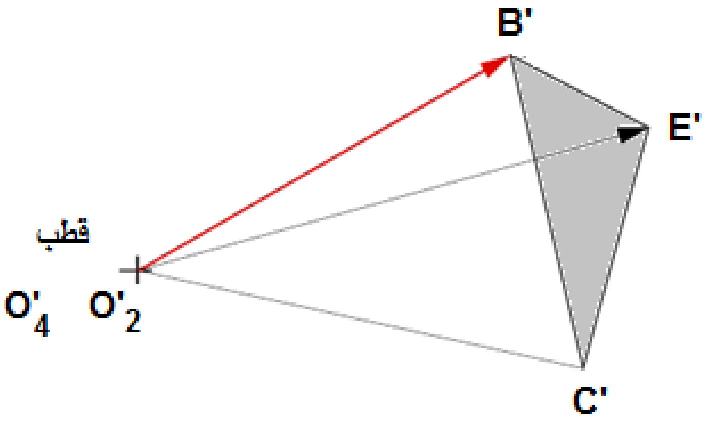
$$V_C + V_{E/C} = V_B + V_{E/B}$$

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- **تصویر سرعت**
  - هر عضو مکانیزم در چند ضلعی سرعت تصویر (**Image**) دارد.
  - اضلاع مثلث**B’D’C’** به ترتیب عمود براضلاع مثلث **BDC** بوده، در نتیجه دو مثلث متشابه می باشند.
  - اگر سرعت دو نقطه روی یک عضو معلوم باشد، سرعت نقطه سوم براحتی از تشابه بدست می آید.

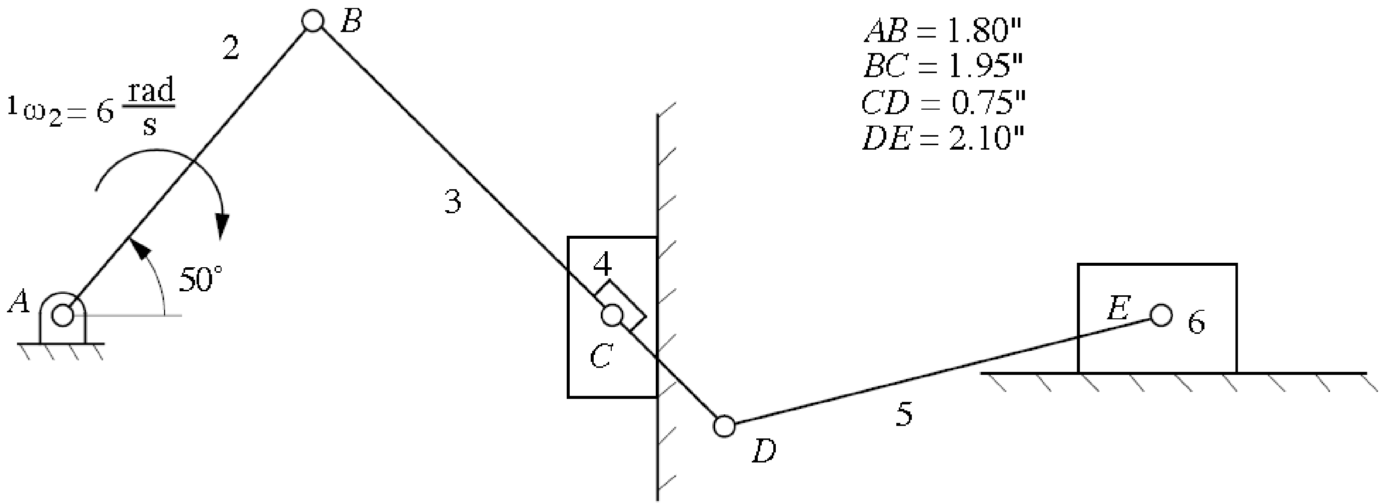


دیاگرام سینماتیکی مکانیزم



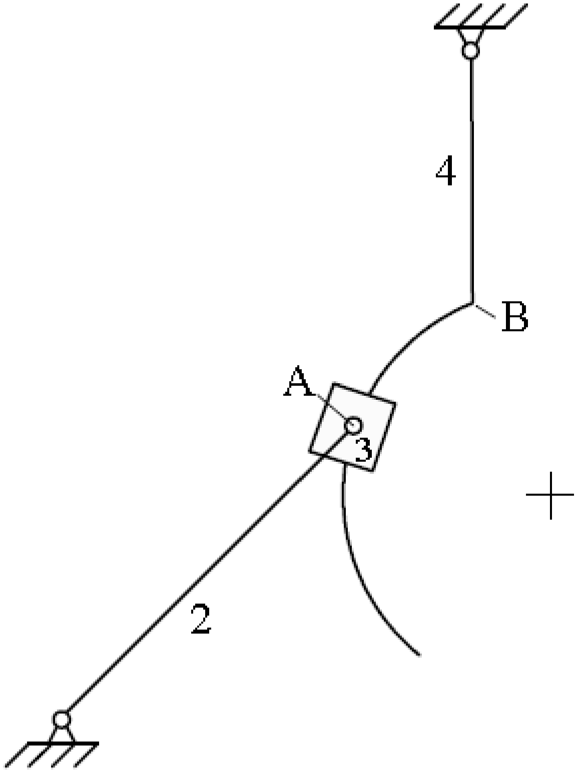
دیاگرام سرعت

- حل چند مسئله
  - سرعت خطی لغزنده ۶ را بدست آورید. نقاط **A** و **C** و **E** در راستای افق قرار گرفته اند.



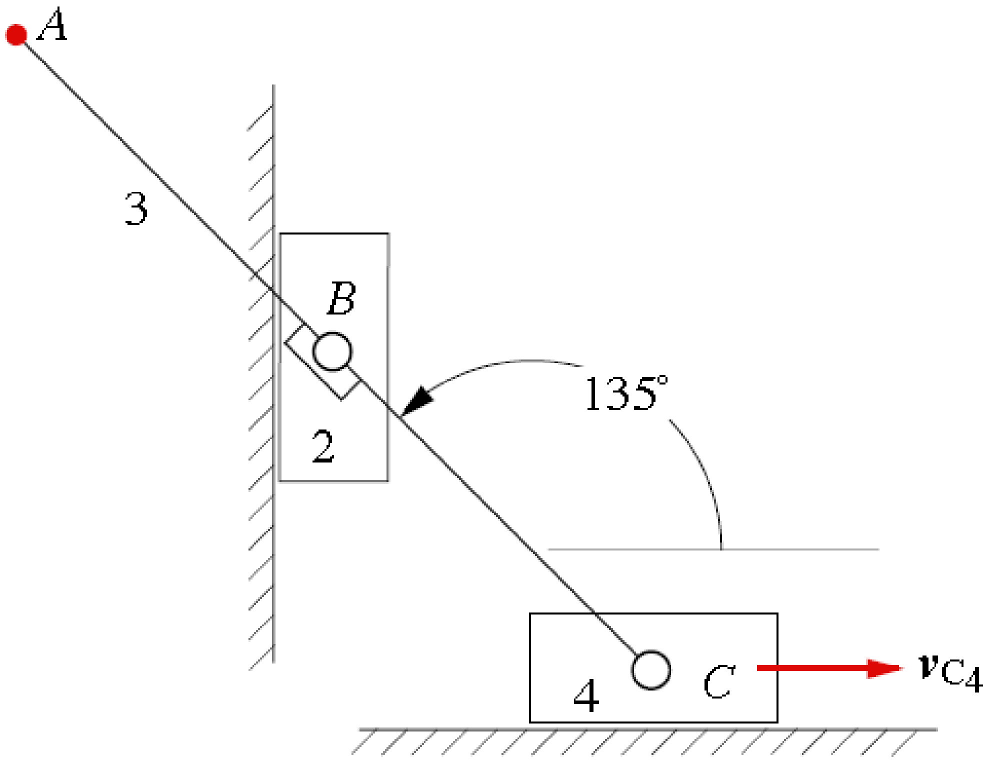
فصل ۵   سرعت در مکانیزمها

- عضو **۲** با سرعت زاویه ای **1.1 rad/sec** در جهت خلاف عقربه های ساعت دوران می کند. سرعت خطی و زاویه ای عضو ۴ را بدست آورید.



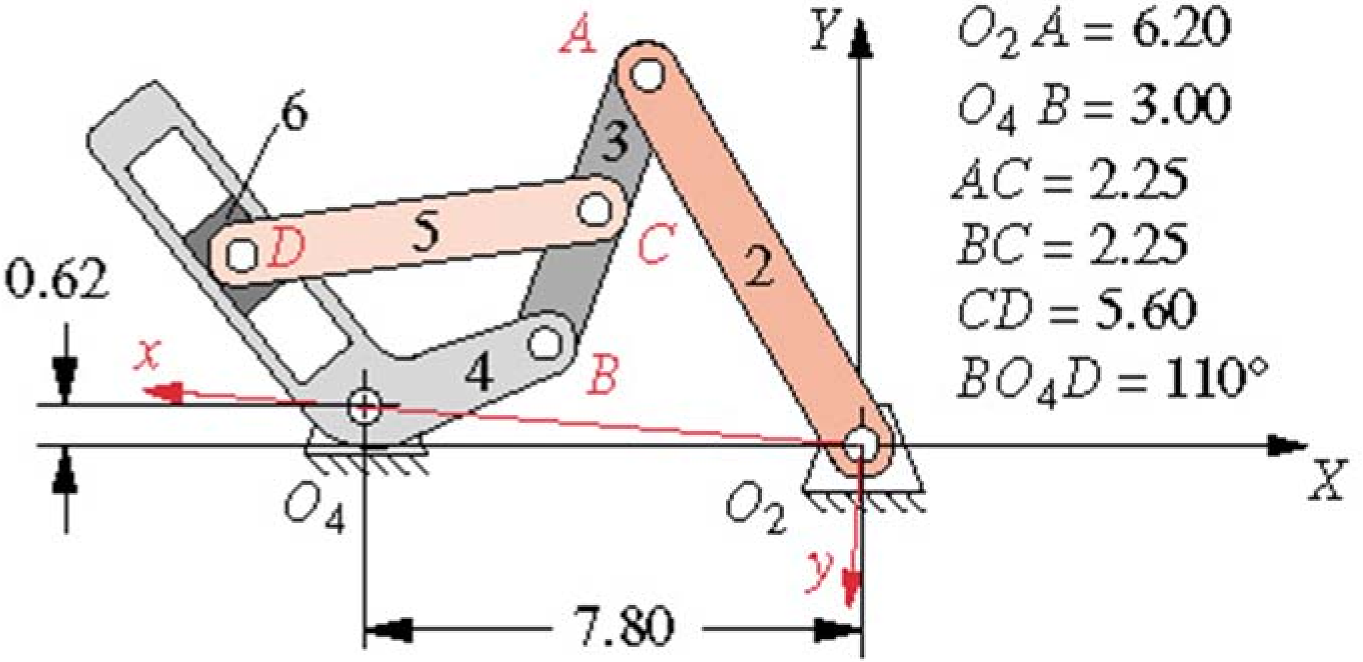
- **تمرینات و مسائل فصل ۵**

۱- با استفاده از مراکز آنی و روش شعاع دوران سرعت نقطه **A** را بدست آورید.



- **تمرینات و مسائل فصل ۵**

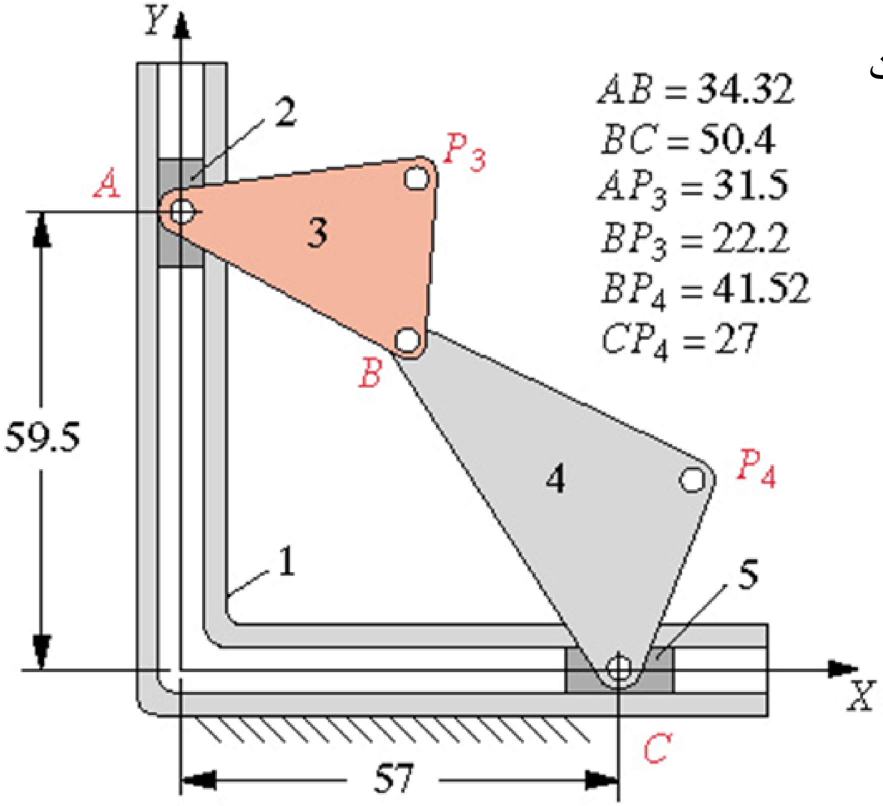
۲- با استفاده از مراکز آنی و روش تجزیه به مولفه ها سرعت نقطه **D** و سرعت زاویه ای عضو ۶ را بدست آورید. سرعت زاویه ای عضو ۲ ۱۰rad/sec **CCW** در نظر بگیرید. زاویه عضو ۲ °۱۲۰ می باشد.



- **تمرینات و مسائل فصل ۵**

۳- مسئله ۲ را با استفاده از روش سزعتهای نسبی و دیاگرام سرعت حل نمایید.

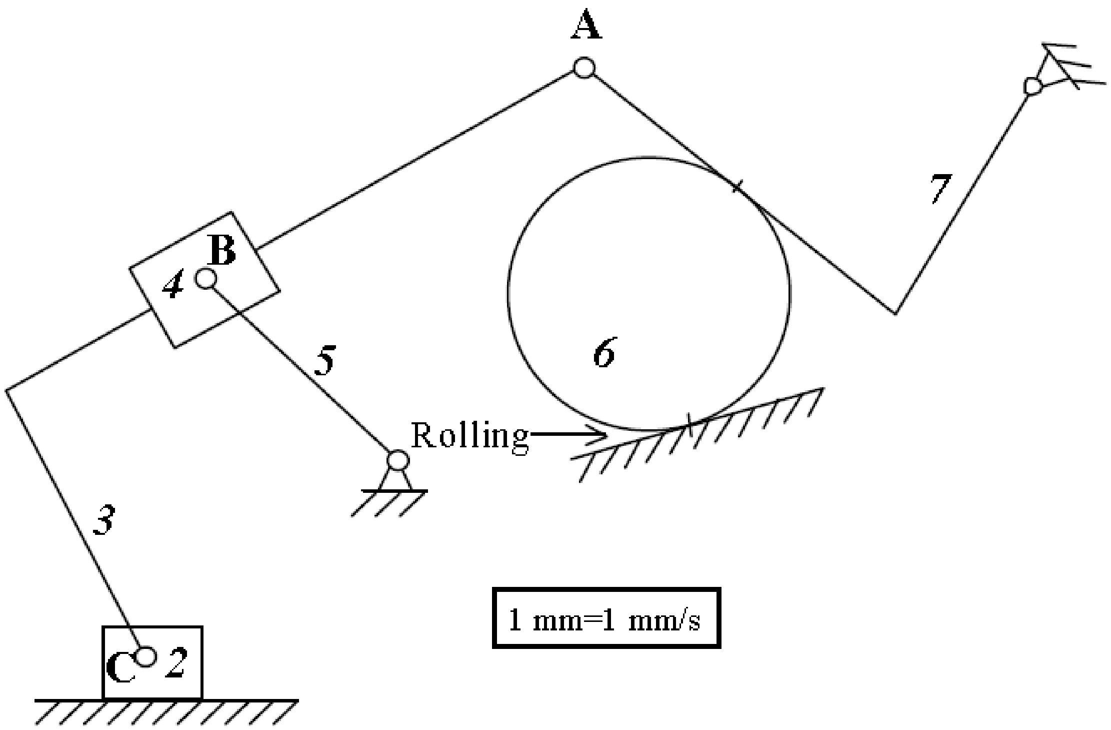
۴- ابتدا تعداد درجات آزادی مکانیزم را بررسی نمایید. در صورتی که لغزنده ۲ و ۵ با سرعت ۲۰ mm/sec به سمت مبدا حرکت نماید، سرعت نقاط B، P_3 و P_4 با استفاده از روش ترسیمی دلخواه بدست آورید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

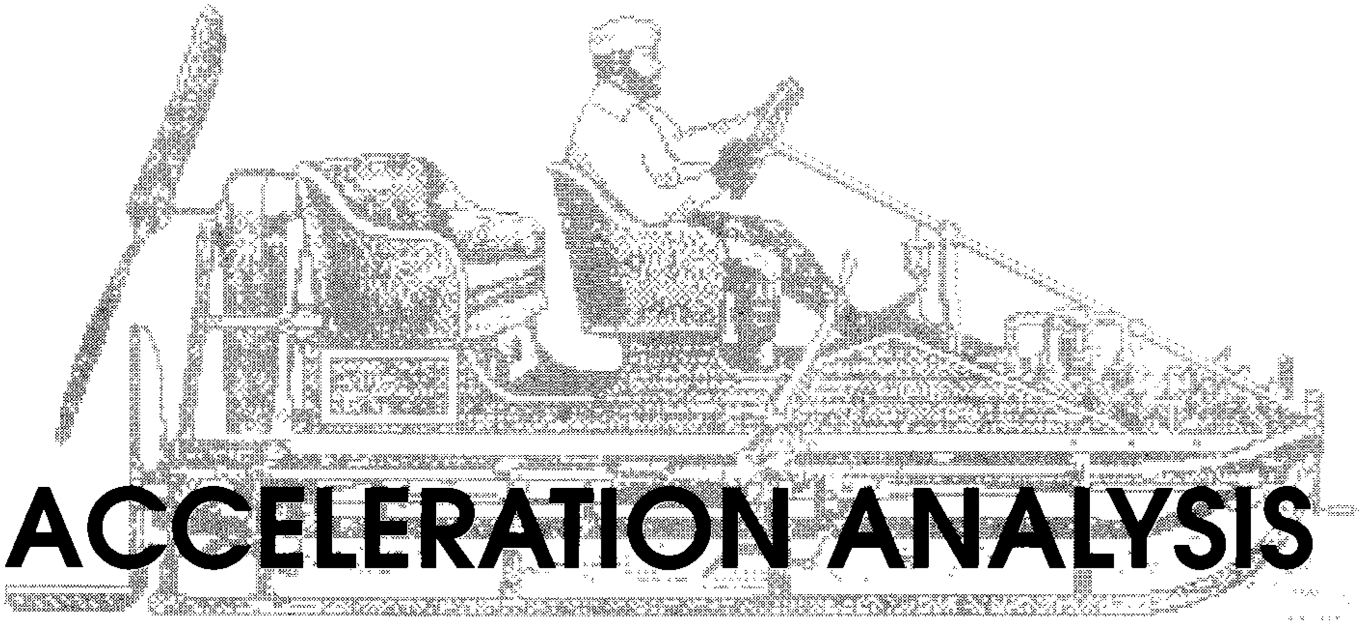
- **تمرینات و مسائل فصل ۵**

۵- مکانیزم زیر با مقیاس کامل رسم شده است. عضو ۶ با سرعت زاویه ای 0.9 rad/sec در جهت عقربه های ساعت دوران می کند. سرعت زاویه ای اعضاء ۳، ۴ و ۵ را بدست آورید.



پایان فصل ۵

فصل ۶   شتاب در مکانیزمها



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- در فصلهای قبلی سرعت خطی لحظه ای یک نقطه روی مکانیزم و سرعت زاویه ای لحظه عضو مورد نظر تعیین شدند. در این فصل "شتابهای خطی و زاویه ای" مورد بررسی قرار می گیرند.

- تحلیل شتاب از طریق جمع شتابهای نسبی انجام می شود، این روش شبیه به روش سرعتهای نسبی می باشد.

- در چندضلعی شتاب قطب بصورت ”O (double prime) نمایش داده می شود.
- سایر نقاط نیز با (double prime) نشان داده می شوند.
- خطوط رسم شده از قطب به نقاط شتاب مطلق و خط بین دو نقطه شتاب نسبی را مشخص می سازد.

فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- معادلات شتاب

$$A^n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 = V\omega$$

$$A^t = R\alpha$$

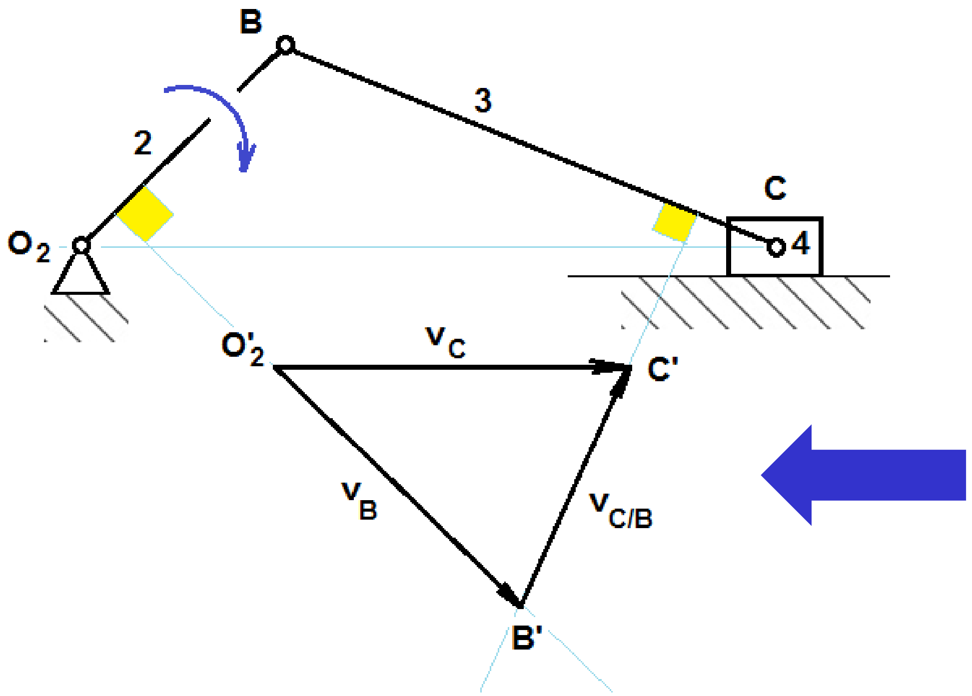
$$A = \sqrt{(A^n)^2 + (A^t)^2}$$

- علاوه بر مولفه های مماسی و عمودی شتاب مولفه **“Coriolis”** شتاب نیز مورد بررسی قرار گرفت.

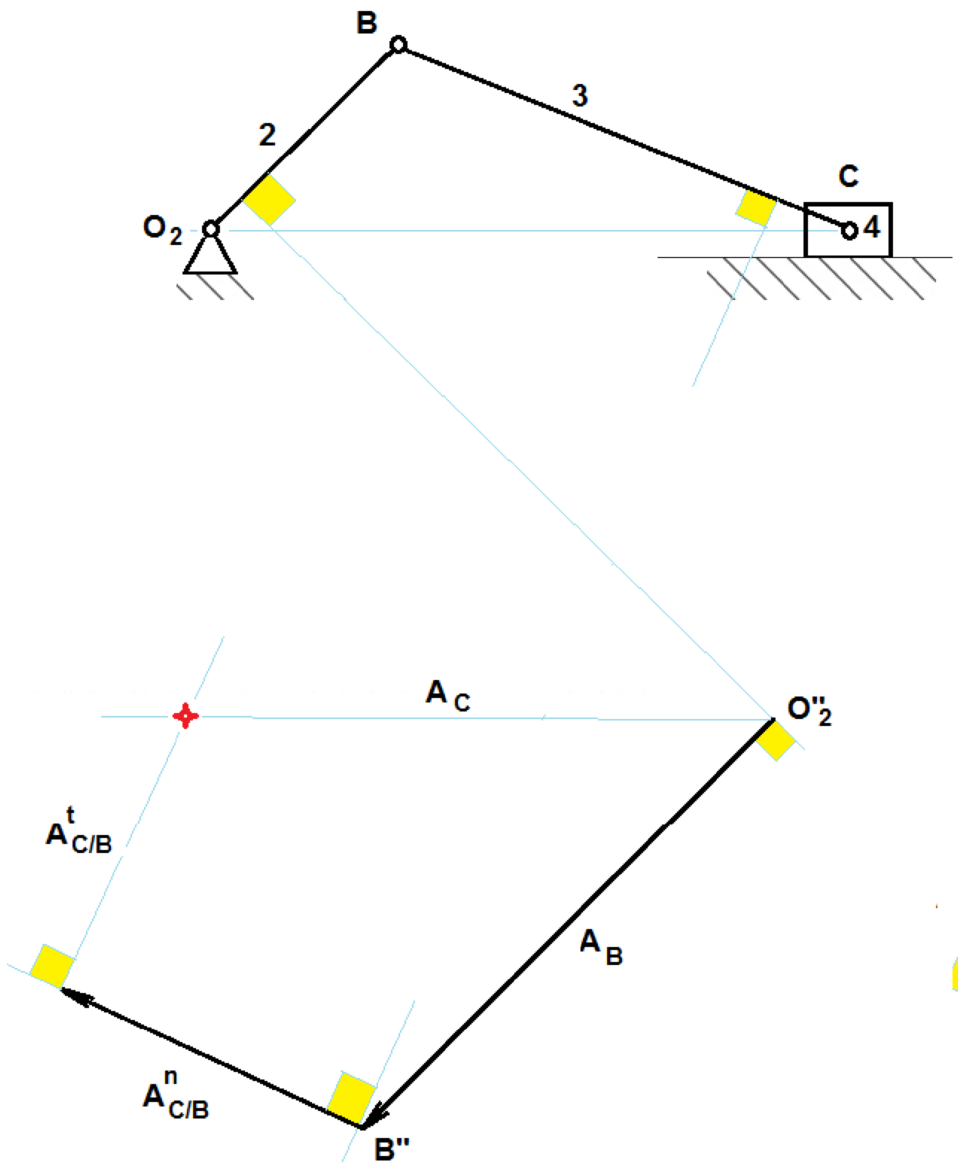
$$A_{cor} = 2V\omega$$

فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- شتاب خطی
  - در مکانیزم لغزنده و لنگ، لنگ دارای سرعت یکنواخت ω_2 می باشد. شتاب نقطه C را بدست آورید.



$$V_C = V_B + V_{C/B}$$



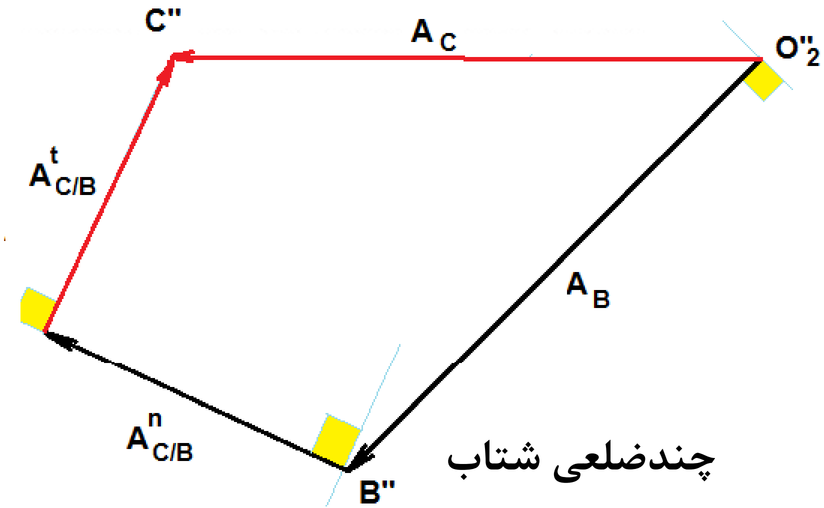
- رسم دیاگرام شتاب

$$A_C = A_B + A_{C/B}$$

$$A^n_C + A^t_C = A^n_B + A^t_B + A^n_{C/B} + A^t_{C/B}$$

$$A^t_B = 0$$

$$A^n_{C/B} = \frac{V_{C/B}^2}{BC}$$



چندضلعی شتاب

- تصویر شتاب (Acceleration Image)
  - برای هر عضو مکانیزم یک تصویر در چندضلعی شتاب وجود دارد.
  - نقاط B و C را در نظر بگیرید:

$$A_{B/C} = A^n_{B/C} + A^t_{B/C}$$

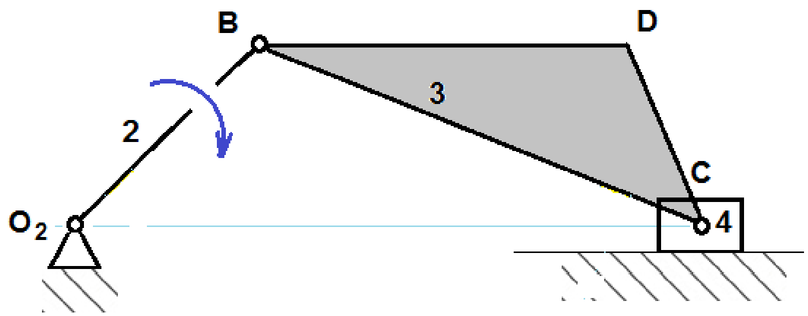
$$|A_{B/C}| = \sqrt{{A^n_{B/C}}^2 + {A^t_{B/C}}^2}$$

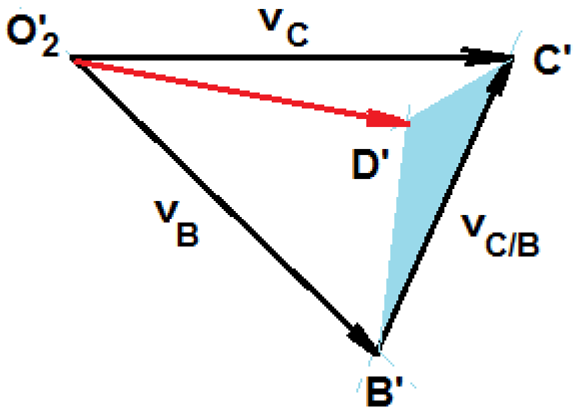
$$= \sqrt{(BC\,\omega^2)^2 + (BC\,\alpha)^2}$$

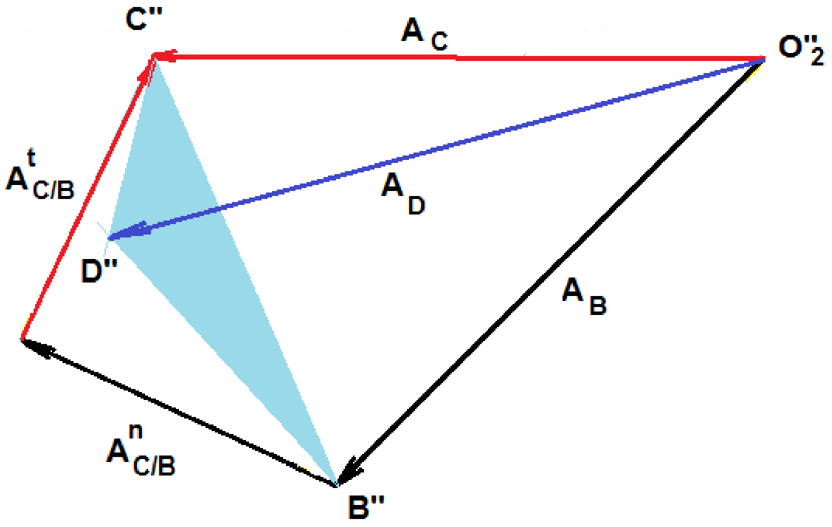
$$= BC\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

لذا شتاب نسبی متناسب با طول عضو است، به عبارت دیگر نقاط روی چند ضلعی شتاب تصویر نقاط متناظر روی مکانیزم می باشند.

- شتاب نقطه D
  - شتاب $A_{D/C}$ و $A_{D/B}$ را بدست آورید.







فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

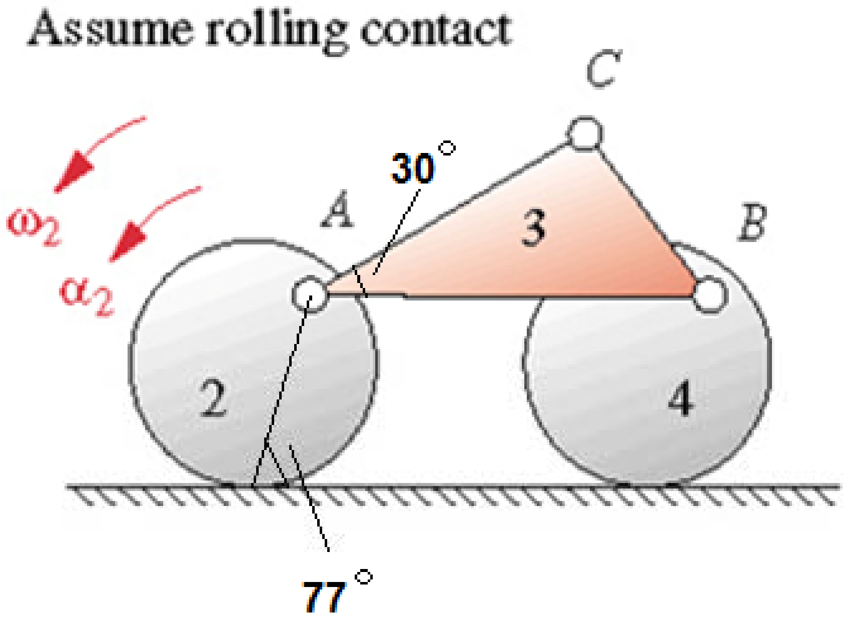
شتاب خطی نقاط A، B، C و شتاب زاویه ای عضو ۳ را بدست آورید.

$\omega_2 = 15\ _{rad/sec}$ $\alpha_2 = 10\ _{rad/sec^2}$

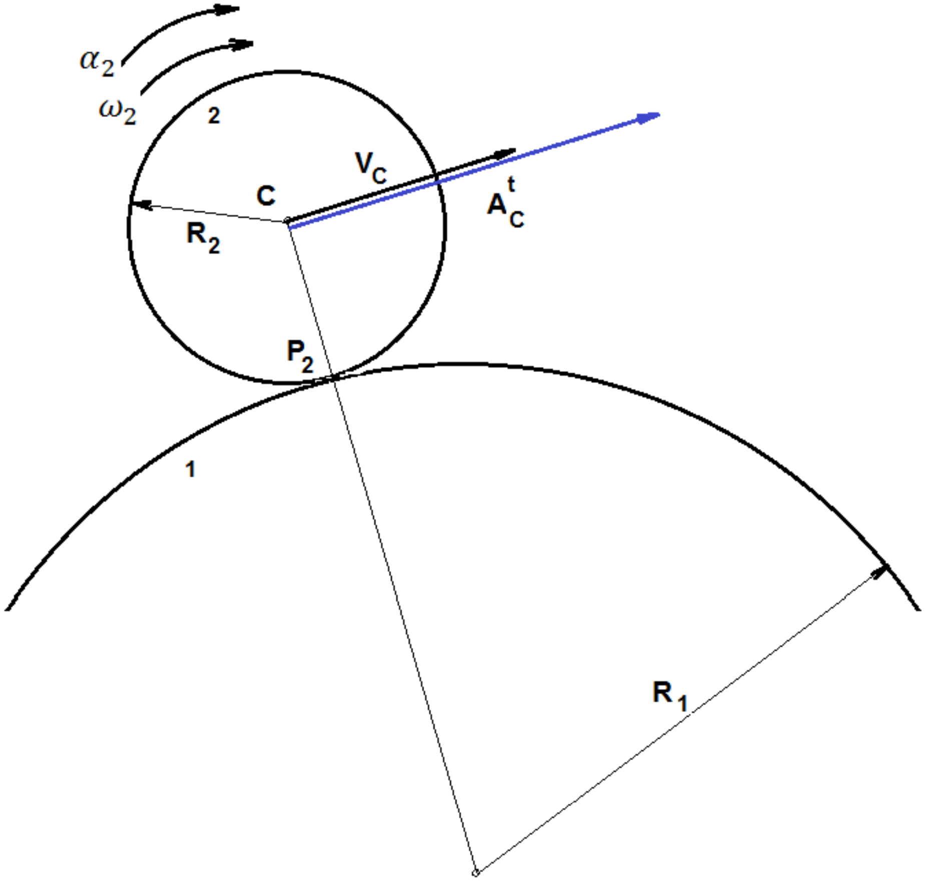
$I_{12}A = 0.75$

AB = 1.5

AC = 1.2



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها



قبل از حل مثال فوق، شتاب اعضاء
در تماش غلتشی بررسی می شود

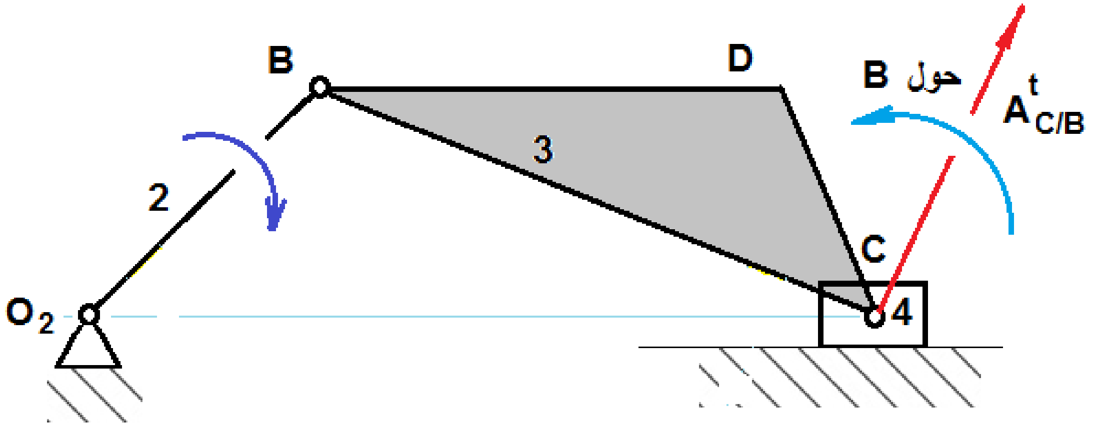
$$A_{P_2} = A_C + A_{P_2/C}$$

$$A_{P_2} = A_C^n + A_C^t + A_{P_2/C}^n + A_{P_2/C}^t$$

- شتاب زاویه ای
  - شتاب زاویه ای هر عضو صلب برابر است با شتاب مماسی یک نقطه روی عضو نسبت به نقطه دیگری روی همان عضو تقسیم بر فاصله آن دو نقطه
  - در مثال قبل شتاب زاویه عضو ۳ برابر است با

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{C/B}}{BC}$$

  - جهت شتاب زاویه ای با انتقال شتاب مماسی روی دیاگرام سینماتیکی مکانیزم بدست می آید.



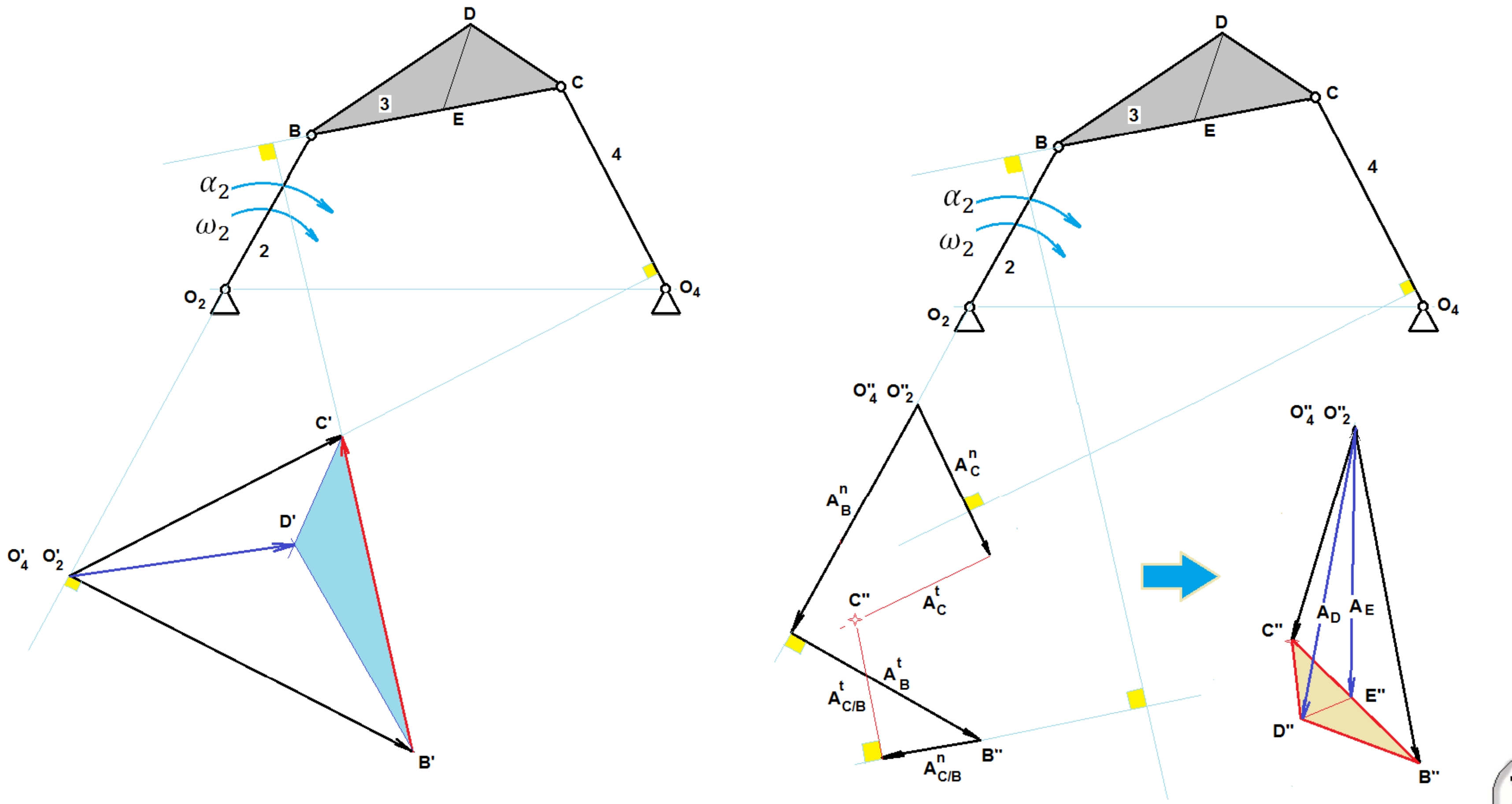
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

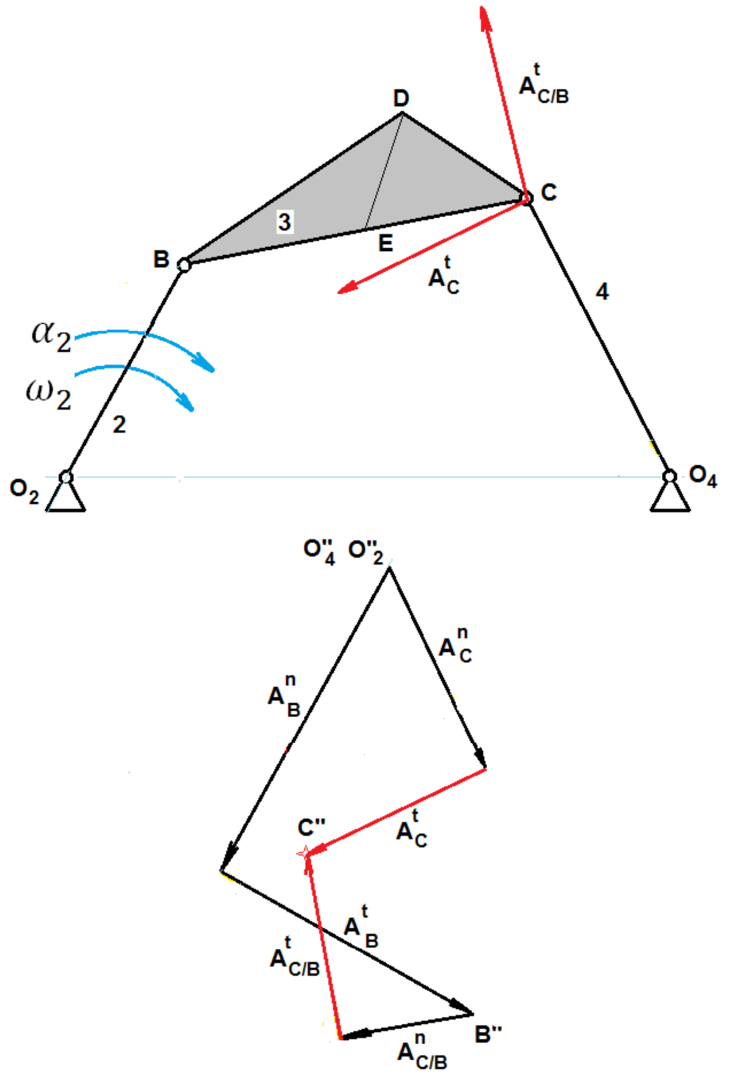
$$V_C = V_B + V_{C/B}$$

$$A_C = A_B + A_{C/B}$$

$$A_C^n + A_C^t = A_B^n + A_B^t + A_{C/B}^n + A_{C/B}^t$$

- مکانیزم چهار میله





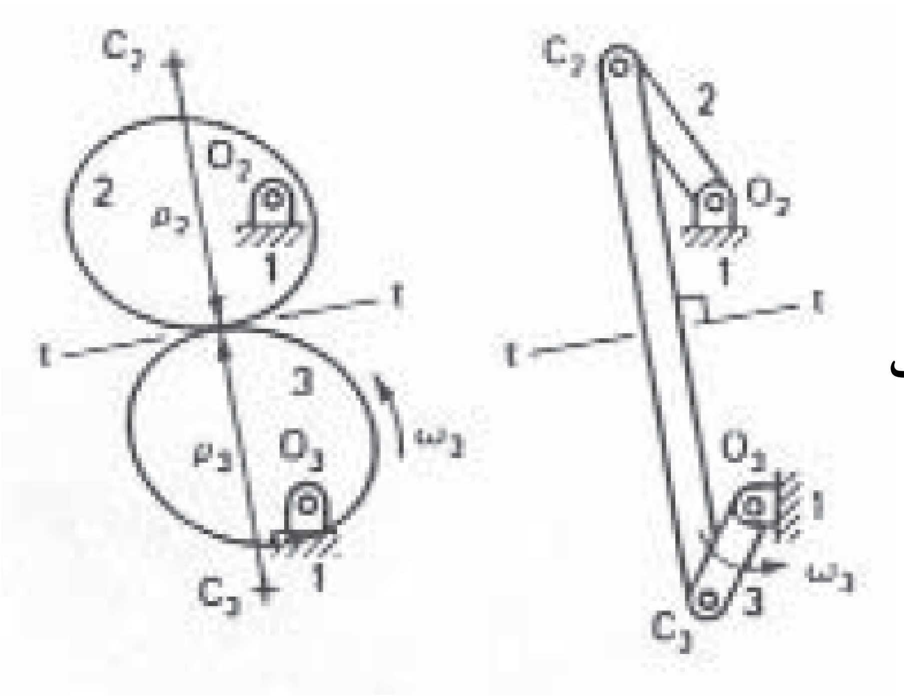
- شتاب زاویه ای

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{C/B}}{BC}$$

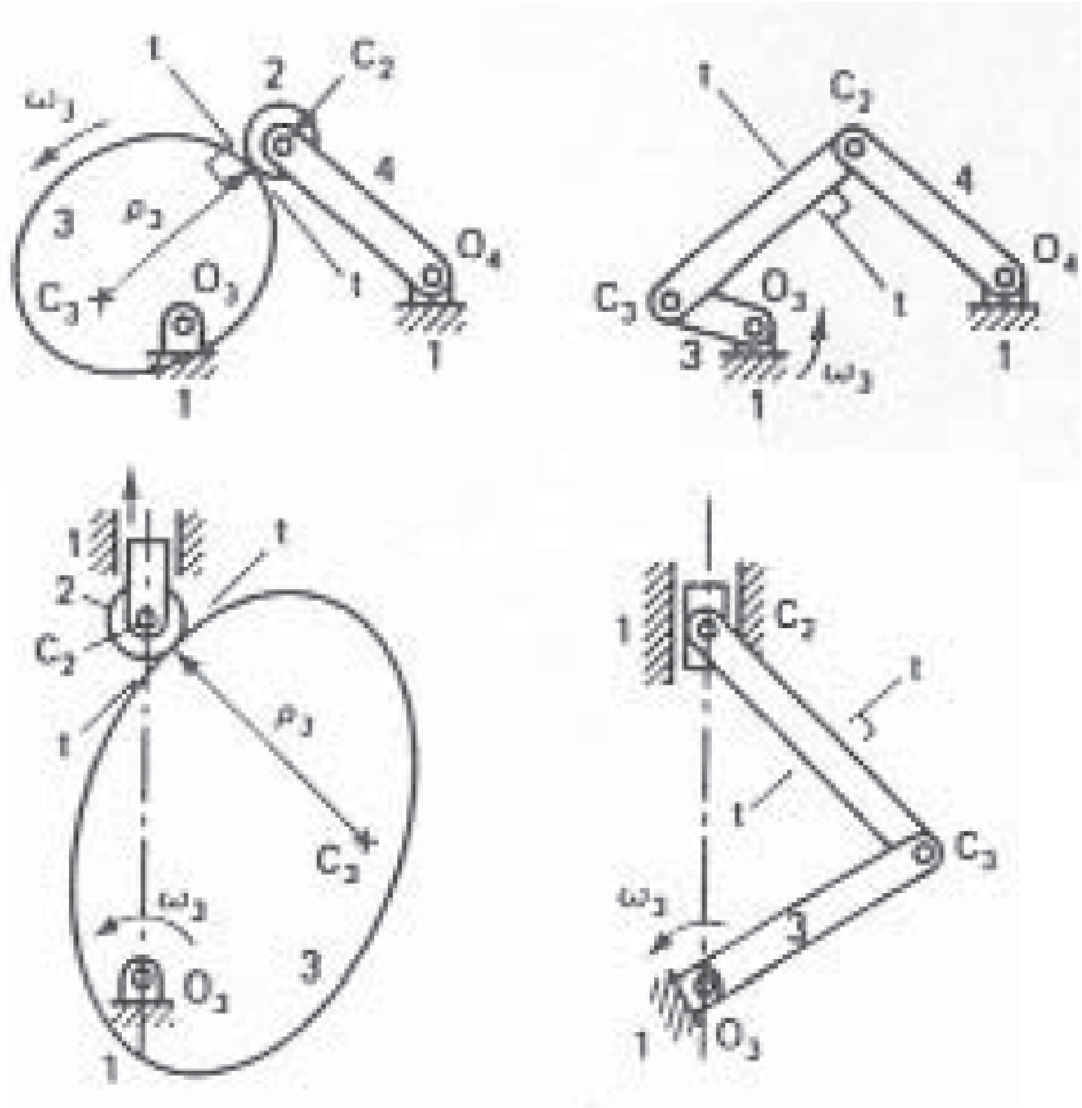
$$\alpha_4 = \frac{A^t_C}{C_4}$$

فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- مکانیزمهای معادل
  - هنگام تحلیل شتاب مکانیزمهای تماس مستقیم به منظور ساده شدن تحلیل می توان آنها را با مکانیزم معادل جایگزین کرد.
  - C_2C_3 عمود مشترک و C_2 و C_3 مراکز انحنا دو جسم است.
  - در صورتیکه پینهای مکانیزم چهار میله در این نقاط قرار گیرد، اثبات می شود دو مکانیزم معادل یکدیگرند.
  - به عبارت دیگر در این لحظه عضو محرک ۲ و متحرک ۳ دارای سرعت و شتاب یکسانی می باشند.

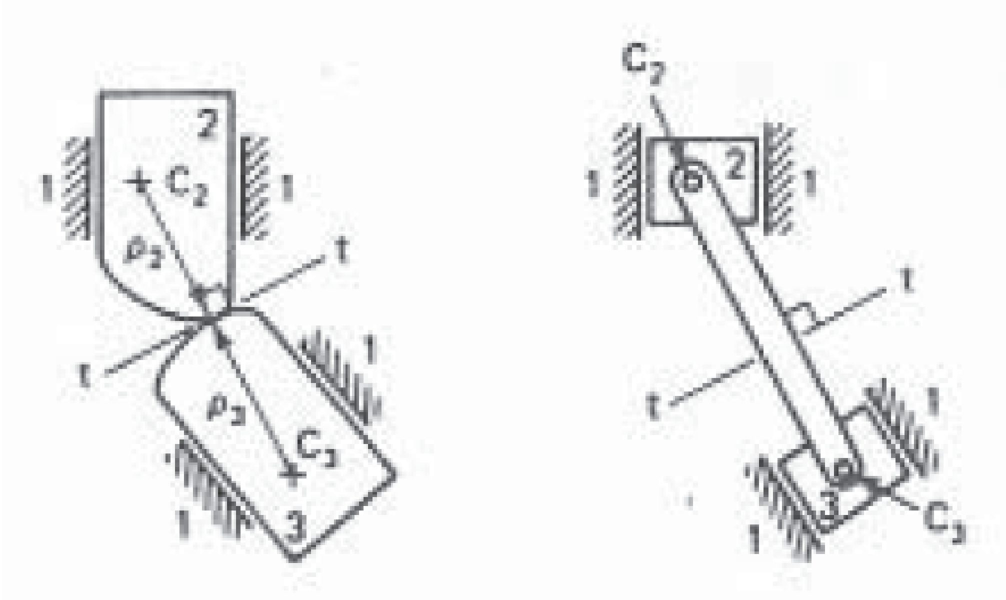


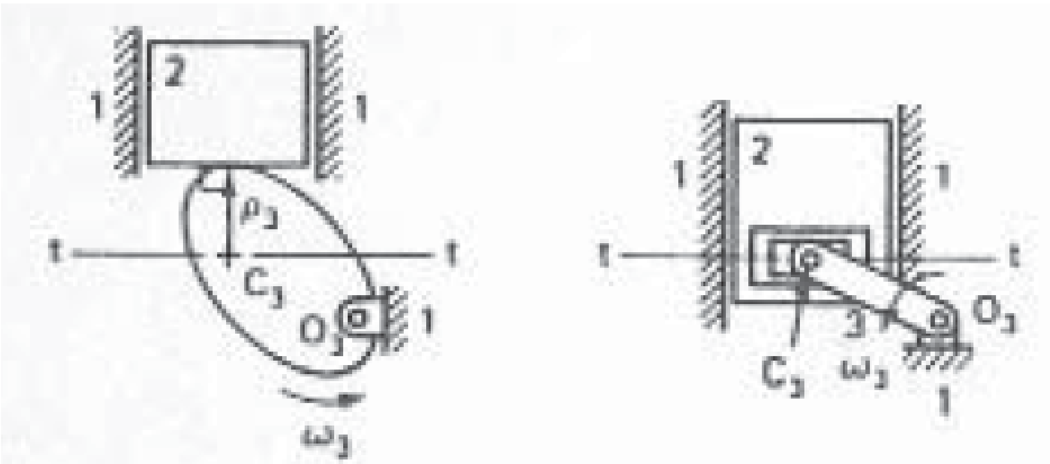
فصل ۶   شتاب در مکانیزمها

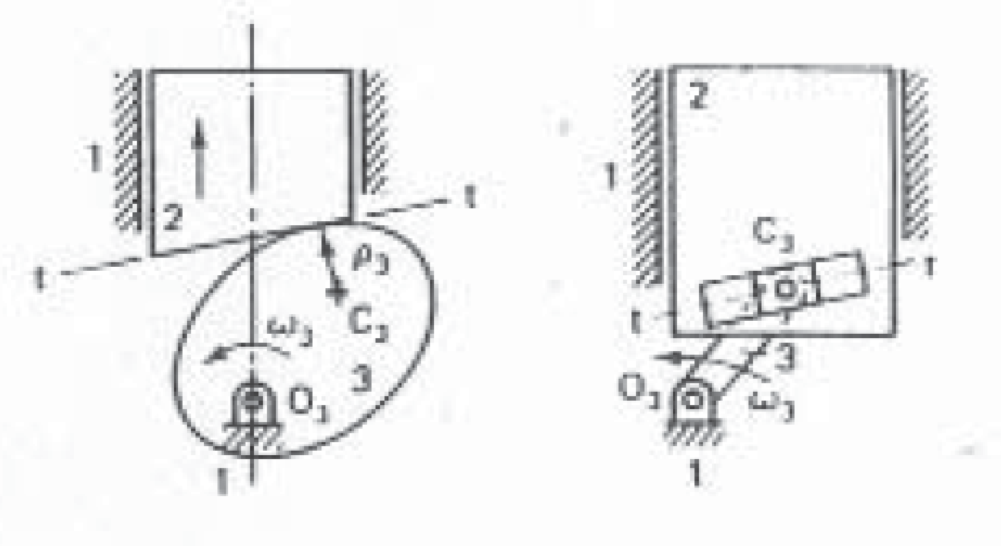


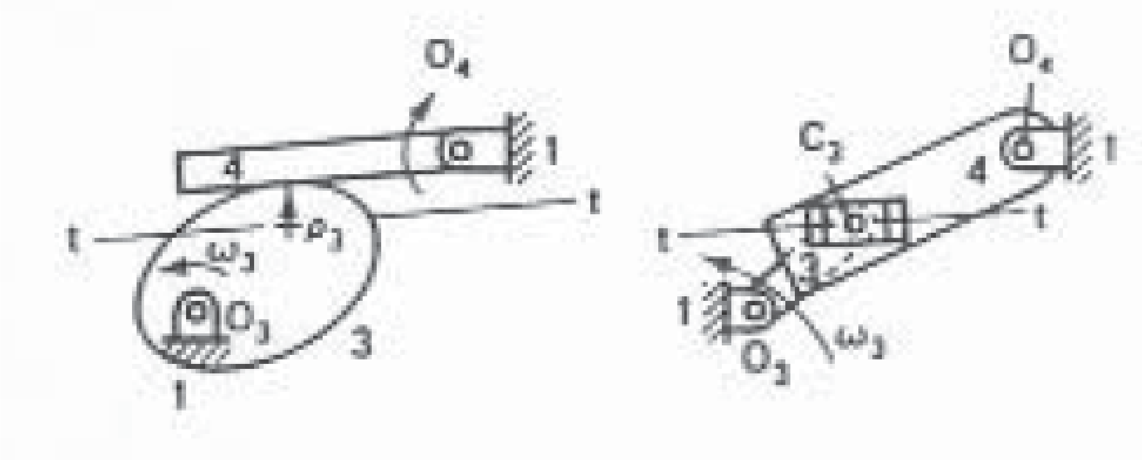
- چند مثال دیگر

فصل ۶   شتاب در مکانیزمها

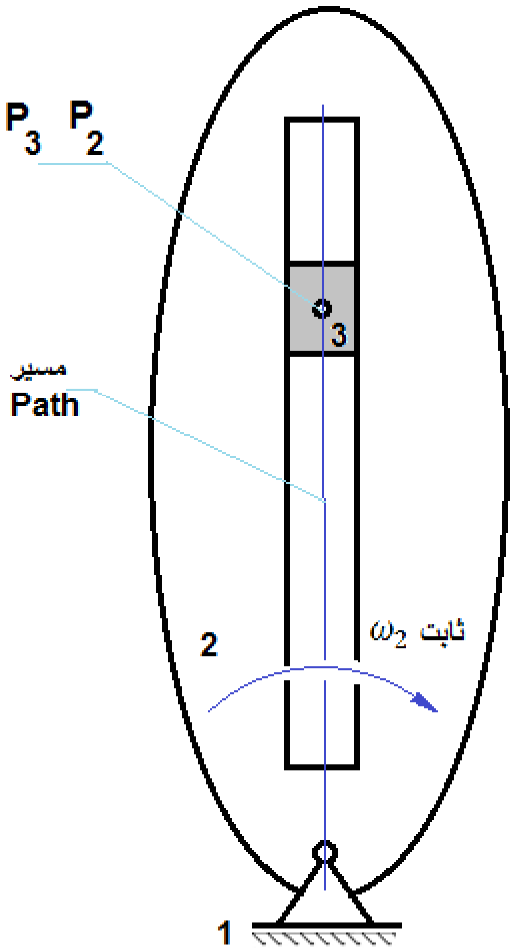





1
2
t
t
ρ3
C3
ω3
3
O3
1
2
1
C3
t
t
3
O3
ω3
1


O4
1
4
t
t
ρ3
ω3
O3
3
1
O4
C3
4
1
t
t
3
1
O3
ω3

- شتاب Coriolis
  - مثالهائی که تا کنون برای تحلیل شتاب مکانیزم استفاده شده اند، فقط دارای اتصال پین بوده اند و یا معکوسی از مکانیزم لغزنده لنگ انتخاب شد که عضو لغزنده دورانی نداشته است.
  - وقتی که اتصال لغزنده در روی یک عضو دورانی قرارداشته باشد، مولفه دیگری از شتاب به نام "شتاب Coriolis" وجود خواهد داشت.



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- در مدت زمان dt مسیر به اندازه dθ با سرعت زاویه ای ثابت ω_2 دوران داشته و نقطه P_2 به نقطه P'_2 منتقل شده است.
- در همین مدت زمان نقطه P_3 به P'_3 منتقل می شود.
- می توان این تغییر مکان را به صورت زیر نمایش داد.

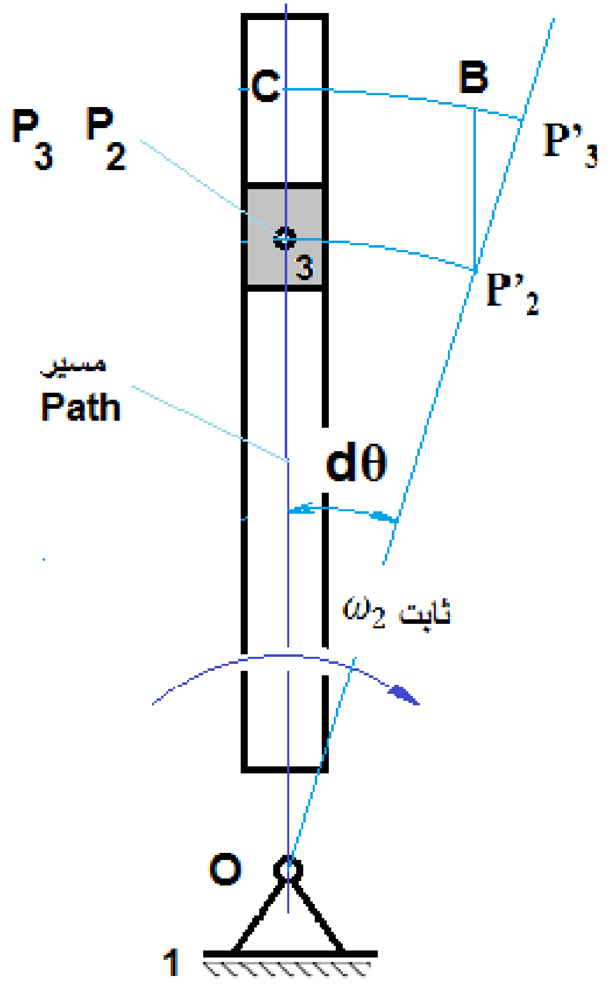
$$P_2P'_2 + P'_2B + BP'_3$$

- تغییر مکان $P_2P'_2$ و P'_2B با سرعت ثابت بوده اما تغییر مکان BP'_3 در نتیجه شتاب در این راستاست:

$$arcBP'_3 = (P'_2B)d\theta$$

$$= (V_{P_3/P_2}dt)(\omega_2 dt) = V_{P_3/P_2}\,\omega_2\,dt^2$$

- سرعت نقطه P_3 عمود بر خط OF بوده و با نرخ ثابتی زیاد می شود (چرا).
- به عبارت دیگر شتاب نقطه P_3 عمود بر OF ثابت است:



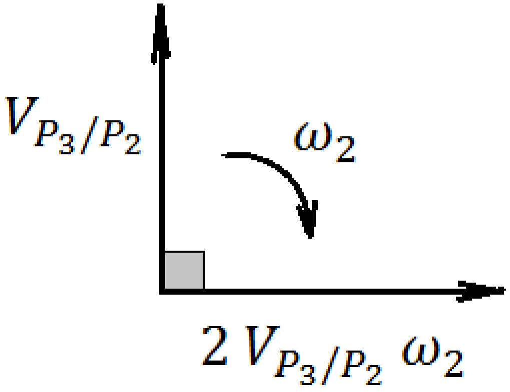
$$BP'_3 = ds = \frac{1}{2}A(dt)^2$$

$$V_{P_3/P_2}\,\omega_2\,dt^2 = \frac{1}{2}A(dt)^2$$

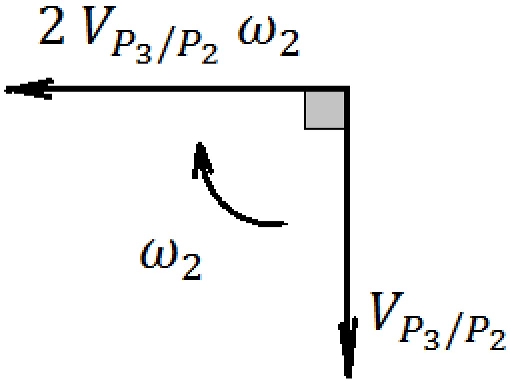
$$A = 2\,V_{P_3/P_2}\,\omega_2$$ → مولفه شتاب Coriolis نقطه P_3

- روش تعیین جهت شتاب Coriolis

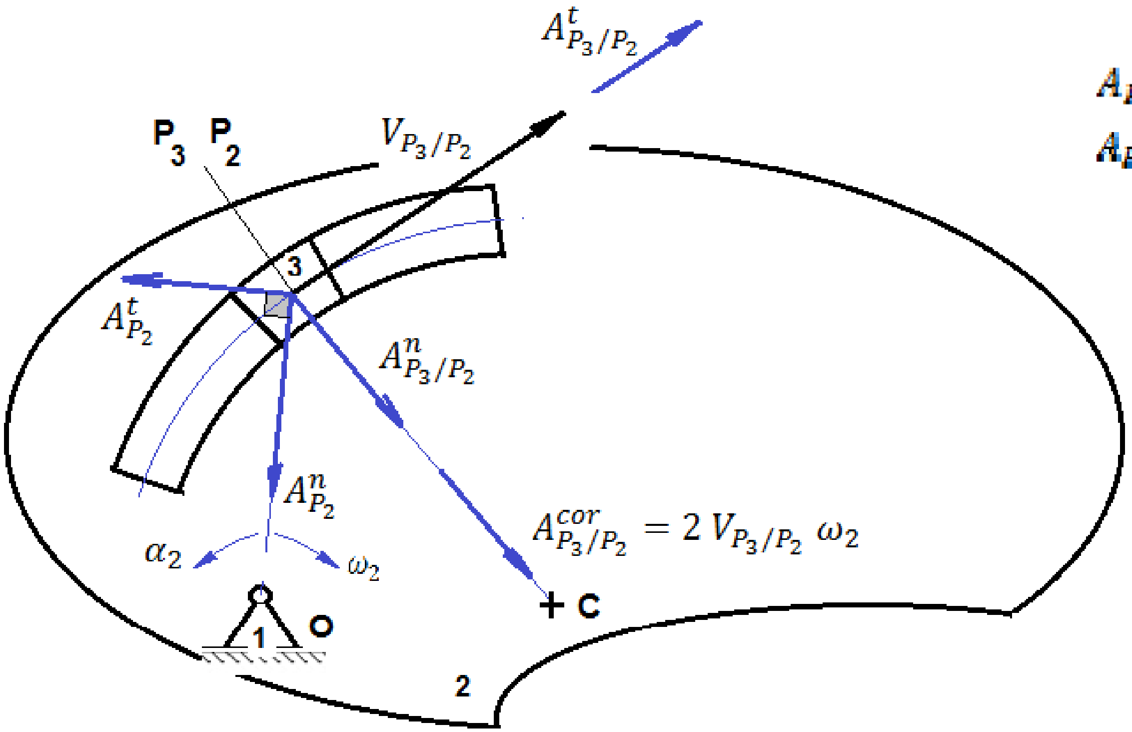
دوران 90^o سرعت $V_{P3/P2}$ در جهت سرعت زاویه ای ω_2 مسیر



OR



- حالت کلی

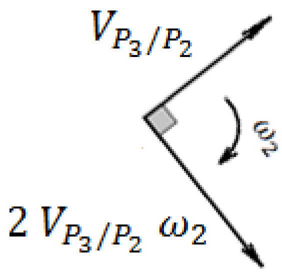


$$A_{P_3} = A_{P_2} + A_{P_3/P_2}$$

$$A_{P_3} = A^n_{P_2} + A^t_{P_2} + A^n_{P_3/P_2} + A^t_{P_3/P_2} + A^{cor}_{P_3/P_2}$$

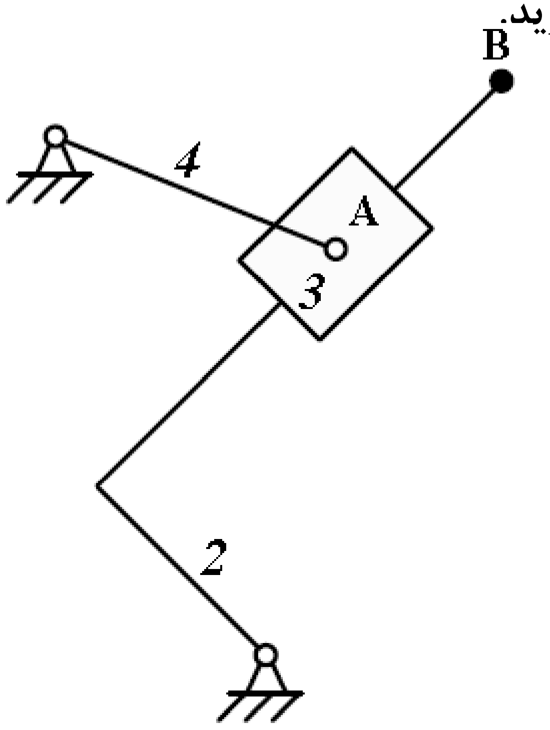
$$A^n_{P_3/P_2} = \frac{V_{P_3/P_2}^{\;2}}{R}$$

$$A^{cor}_{P_3/P_2} = 2\,V_{P_3/P_2}\,\omega_2$$



حل چند مثال

– مکانیزم نشان داده شده با مقیاس ۱/۳ واقعی رسم شده است، بازوی ۴ با نرخ **1 rad/sec CCW** دوران می کند و با نرخ **0.5 rad/sec^2** افزایش سرعت دارد. سرعت و شتاب زاویه ای بازوی ۲ و شتاب خطی نقطه **B** را بدست آورید.



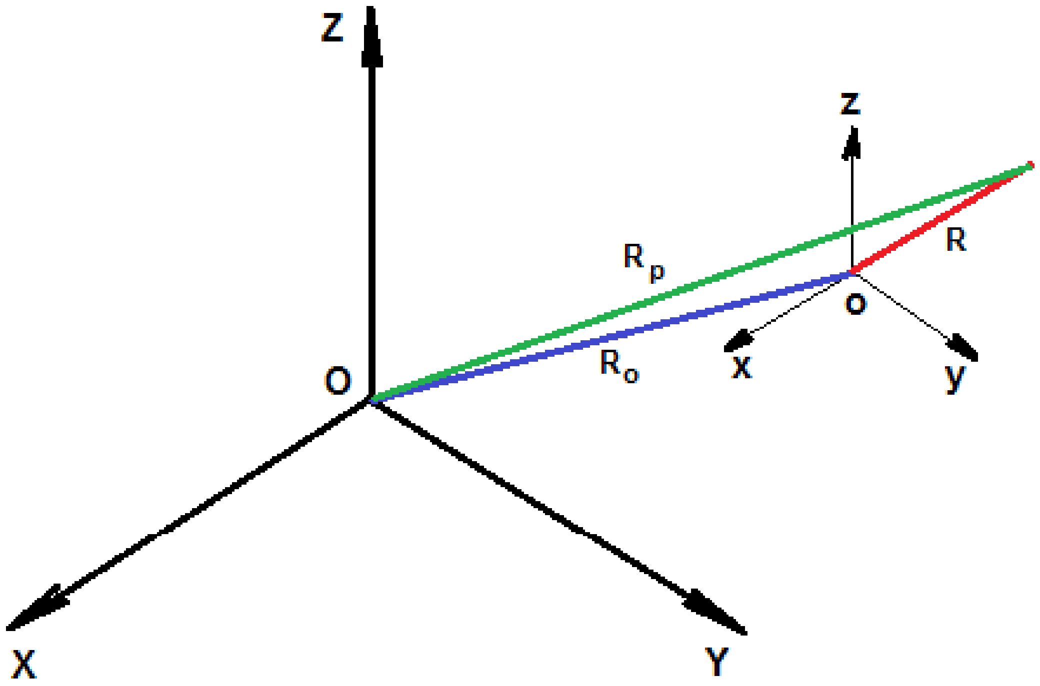
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- تحلیل سرعت و شتاب با استفاده از روابط برداری
  - دستگاه ثابت XYZ دستگاه متحرک xyz
  - موقعیت نقطه P نسبت به دستگاه ثابت

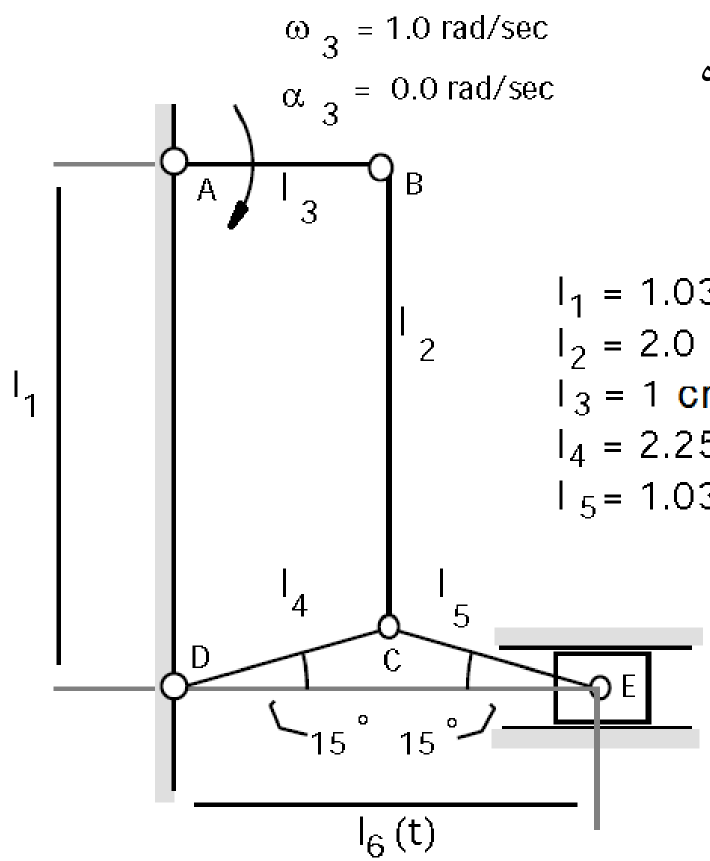
$$R_P' = R_o' + R'$$

$$\overline{R_o'} = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$$

$$R' = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$



• تمرینات و مسائل فصل ۶



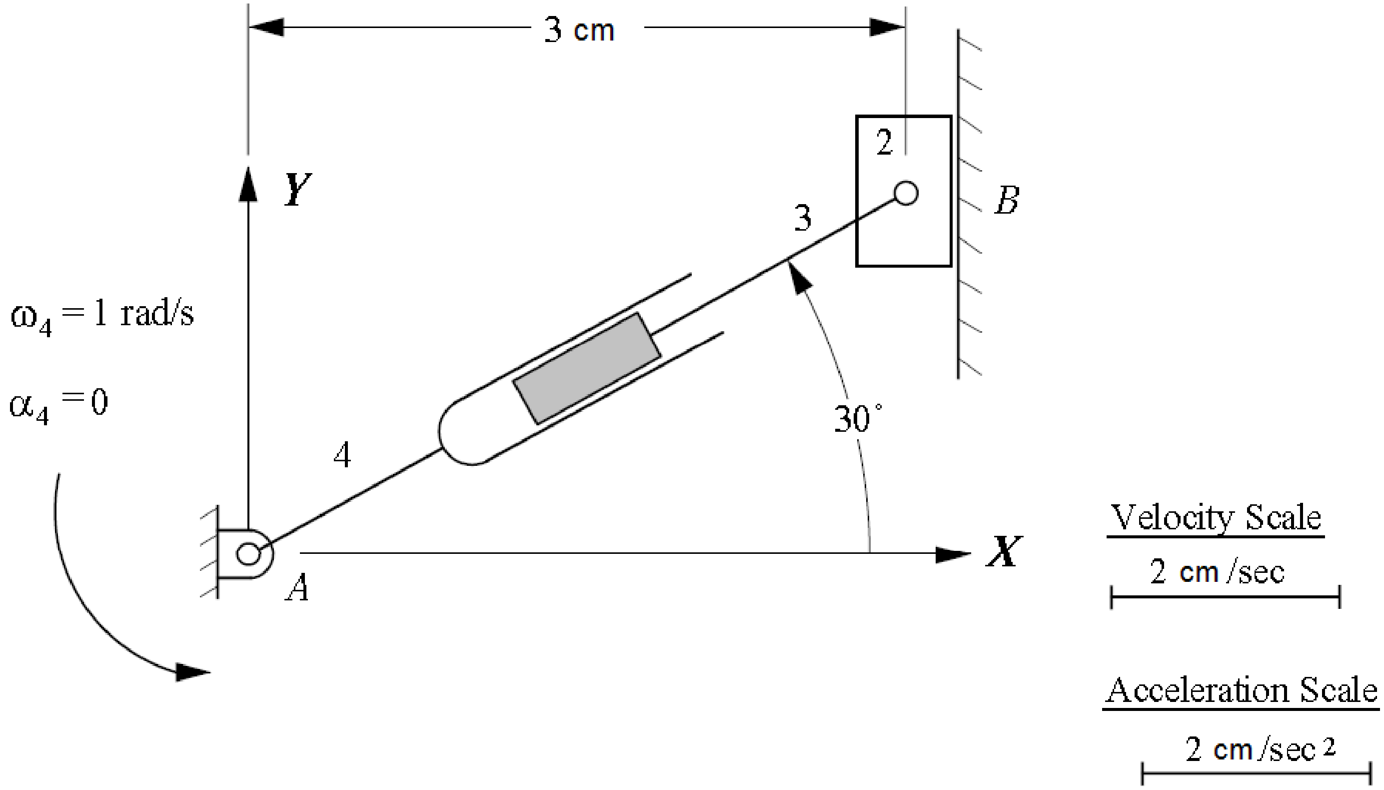
۱- سرعت و شتاب زاویه ای بازوهای ۲، ۴ و ۵ را بدست آورده سپس شتاب خطی نقطه **E** را محاسبه نمایید.

$l_1 = 1.035$ cm
$l_2 = 2.0$ cm
$l_3 = 1$ cm
$l_4 = 2.259$ cm
$l_5 = 1.035$ cm

velocity scale: 1cm/sec = 2 cm
acceleration scale: 1cm/sec ^{2} = 2 cm

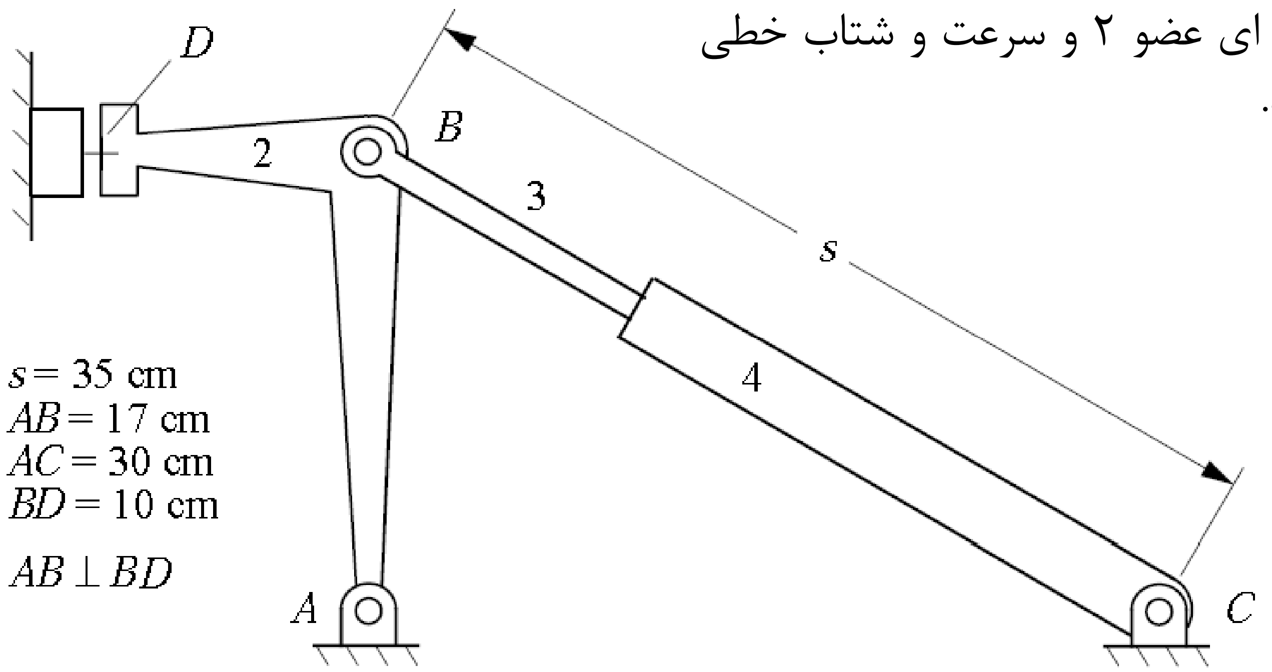
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

۲- سرعت و شتاب خطی نقطه B را بدست آورید.



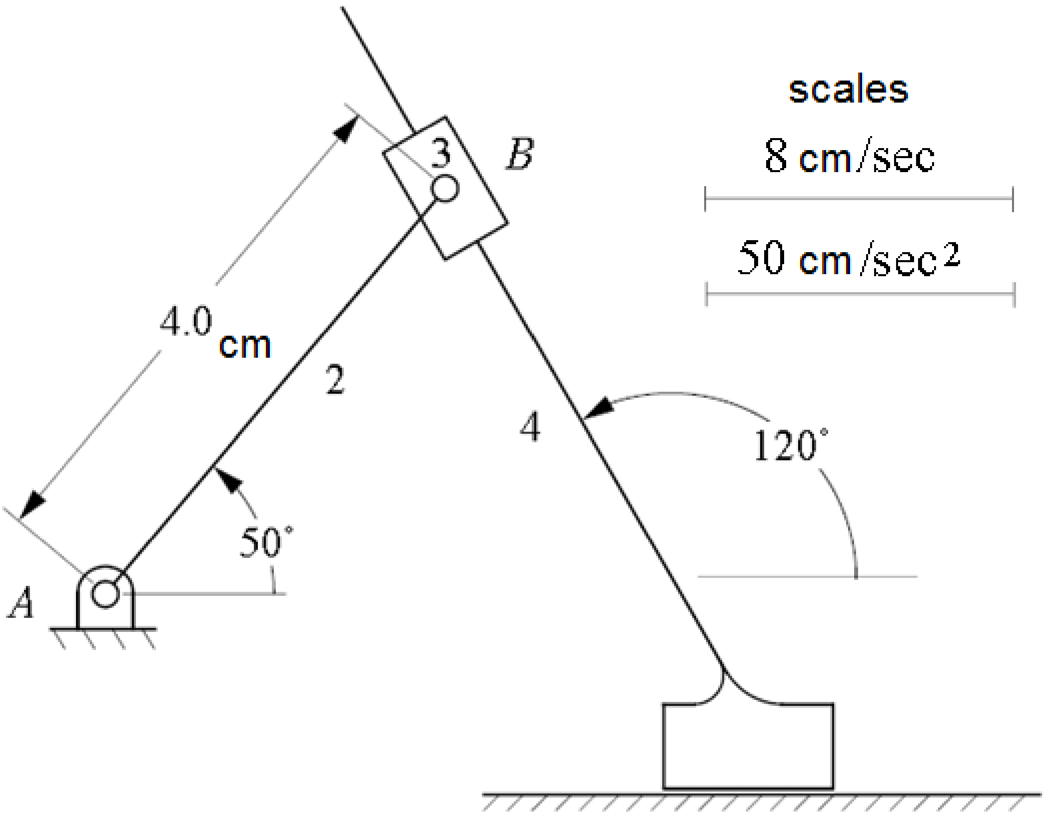
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

۳- مکانیزم clamping نشان داده شده در شکل توسط یک جک پنوماتیک عمل می کند. اگر سرعت و شتاب باز شدن جک به ترتیب 5 cm/s و $2\ cm/s^2$ باشد سرعت و شتاب زاویه ای عضو ۲ و سرعت و شتاب خطی نقطه D بدست آورید.



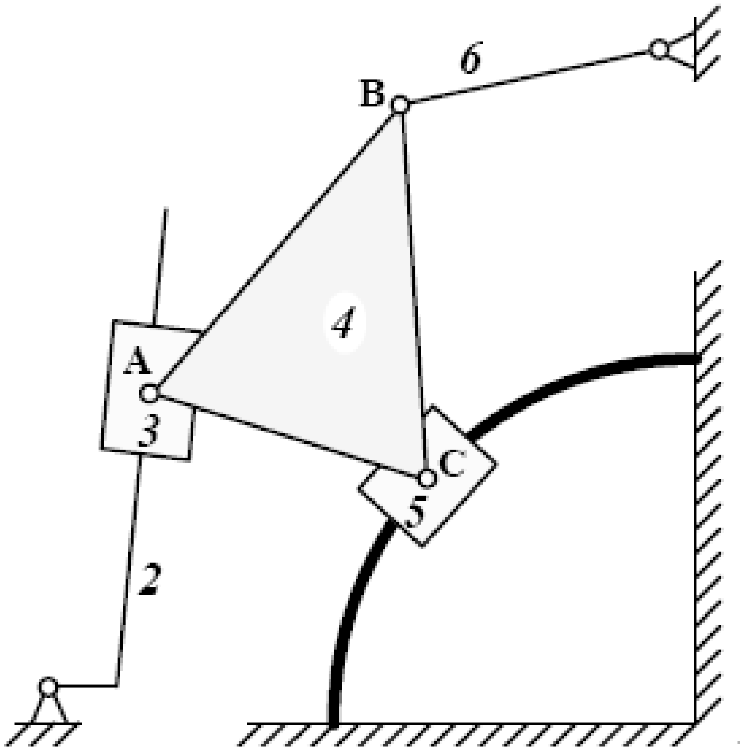
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

۴- در مکانیزم زیر عضو ۴ با سرعت و شتاب خطی $8_{cm/s}$ و $80_{cm/s^2}$ به سمت چپ حرکت می کند.
سرعت و شتاب زاویه ای عضو ۲ را بدست آورید.



فصل ۶   شتاب در مکانیزمها

۵- مکانیزم زیر با مقیاس نصف رسم شده است. میله ۶ با سرعت ثابت ۱.۱۵ رادیان بر ثانیه CW دوران میکند. سرعت و شتاب زاویه ای میله ۲ را با استفاده از دیاگرام سرعت و شتاب بدست آورید.



پایان

فصل ۷ تحلیل مکانیزمها
قسمت اول

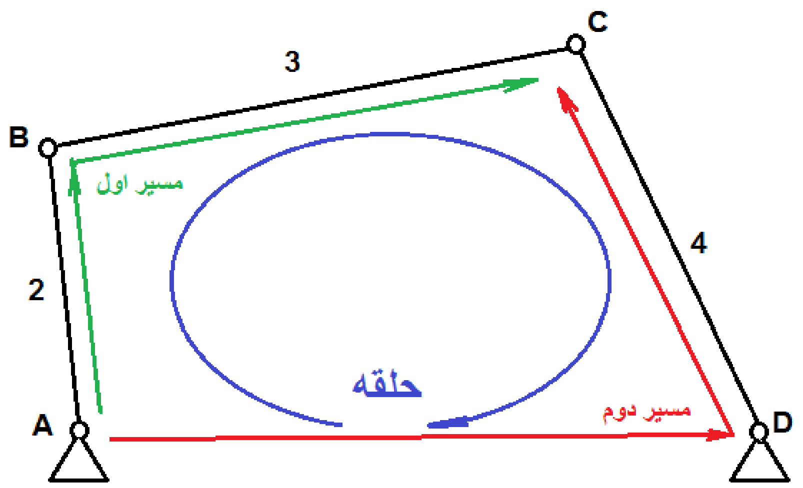
فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

- در فصلهای قبلی از روشهای ترسیمی برای تحلیل مکانیزمها استفاده شد. در این فصل از روشهای تحلیلی یا حل ریاضی معادلات استفاده می شود.

- قیود هندسی یک مکانیزم را می توان با استفاده از معادلات حلقه بسته بردارهای تغییرمکان، سرعت و شتاب نمایش داد.

- معادلات حلقه بسته تغییر مکان برحسب دو مسیر متفاوت که دو نقطه در یک حلقه (loop) مکانیزم به هم متصل می کنند نوشته می شوند.

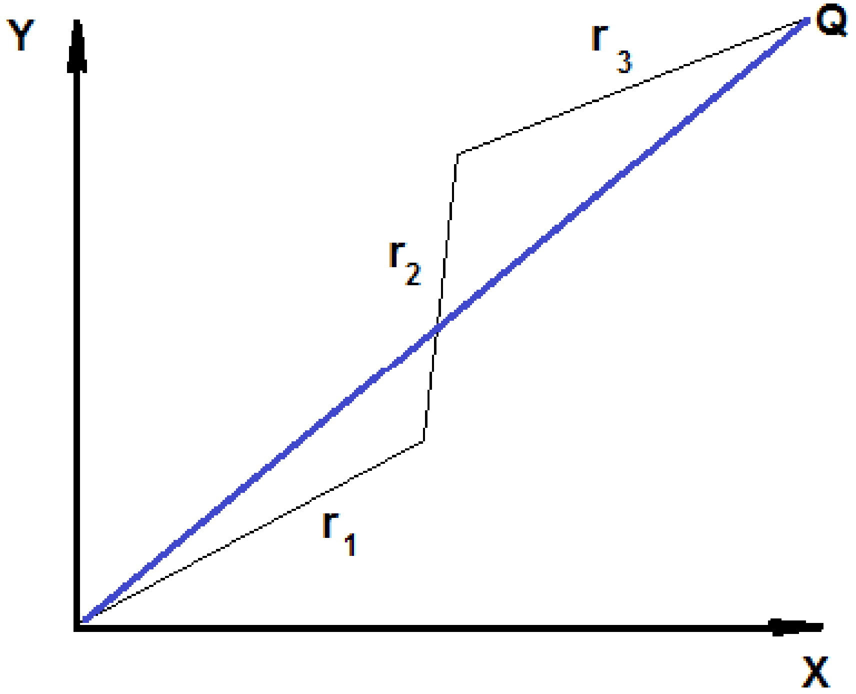
- به عنوان مثال مکانیزم چهار میله زیر را در نظر بگیرید:



- نقطه **C** از دو مسیر نمایش داده می شود.

- تغییرمکان

هنگام تحلیل یک مکانیزم می توان مکانهای نسبی زنجیره نقاط مورد نظر را با زنجیره ای از بردارها نمایش داد.



$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_k = r_k(\cos\theta_k\,\hat{\imath} + \sin\theta_k\,\hat{\jmath})$$

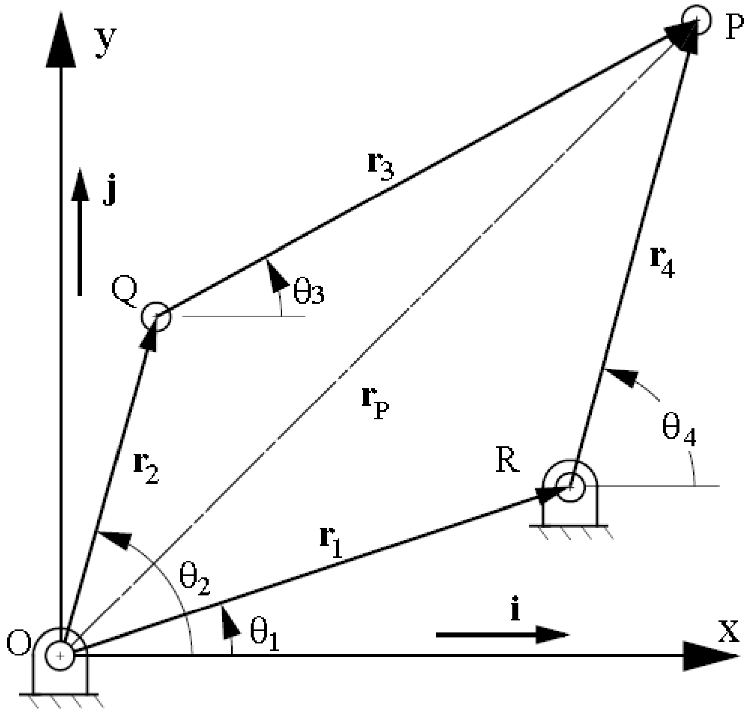
تمرین از معادلات فوق مشتق بگیرید

- معادلات تحلیلی مکانیزم چهار میله

معادلات حلقه بسته

$$r_P = r_2 + r_3 = r_1 + r_4$$

$$r_2(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j) + r_3(\cos\theta_3 i + \sin\theta_3 j) = r_1(\cos\theta_1 i + \sin\theta_1 j) + r_4(\cos\theta_4 i + \sin\theta_4 j)$$

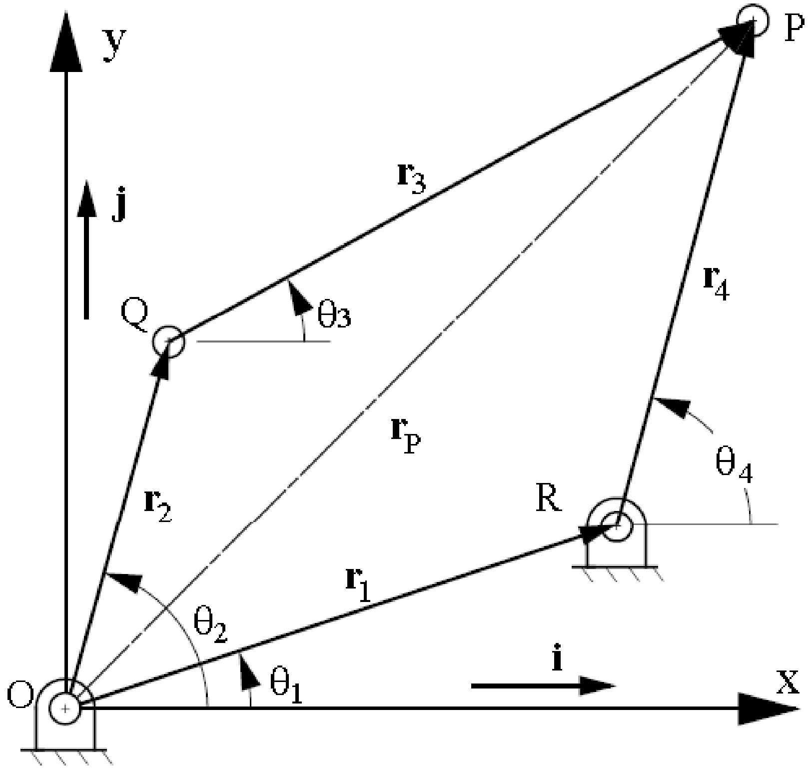


$$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4$$

$$r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4$$

Loop closure equation

حل چهار میله برای حالتی که بازوی ۲ محرک باشد:



- بردار $\mathbf{r_1}$ ثابت، θ_1 و r_1 ثابت می باشند
- ورودی ها
  - در حل تغییر مکان θ_2
  - در حل سرعت $\dot{\theta}_2$
  - در حل شتاب $\ddot{\theta}_2$
- مجهولات
  - در حل تغییر مکان θ_3 θ_4
  - در حل سرعت $\dot{\theta}_3$ $\dot{\theta}_4$
  - در حل شتاب $\ddot{\theta}_3$ $\ddot{\theta}_4$

آیا قابل حل است؟

حل معادلات مکانیزم چهار میله

دستگاه معادلات غیر خطی	Position Analysis
	↓
دستگاه معادلات خطی	Velocity Analysis
	↓
دستگاه معادلات خطی	Acceleration Analysis

- حل معادلات موقعیت
  - مجهولات θ_3 θ_4
  - توان ۲ رساندن طرفین و حذف θ_3

$$r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_2\cos\theta_2$$

$$r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_2\sin\theta_2$$

$$\begin{aligned} r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4\left(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4\right) \\ -2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + 2r_2r_4\left(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4\right)\end{aligned}$$

در معادله فوق θ_4 برحسب θ_2 بصورت ضمنی داده شده، اما آنچه مورد نظر است حل صریح می باشد.

پس از مرتب سازی برحسب ضرایب θ_2 و θ_4 داریم

$$A\cos\theta_4 + B\sin\theta_4 + C = 0$$

where

$$\left.\begin{aligned}
A &= 2r_1r_4\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_2 \\
B &= 2r_1r_4\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_2 \\
C &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)
\end{aligned}\right\}$$

برای حل معادله مثلثاتی فوق از تانژانت نصف قوس استفاده می کنیم:

$$\sin\theta_4 = \frac{2\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

$$(C-A)t^2 + 2Bt + (A+C) = 0$$

$$t = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$$

t ریشه های معادله درجه ۲ فوق می باشد که هر دو جواب معتبراست

$$t = \frac{-2B+\sigma\sqrt{4B^2-4(C-A)(C+A)}}{2(C-A)} = \frac{-B+\sigma\sqrt{B^2-C^2+A^2}}{C-A}$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode

دو جواب برای θ_4 وجود دارد که هر دو جواب معتبرند.

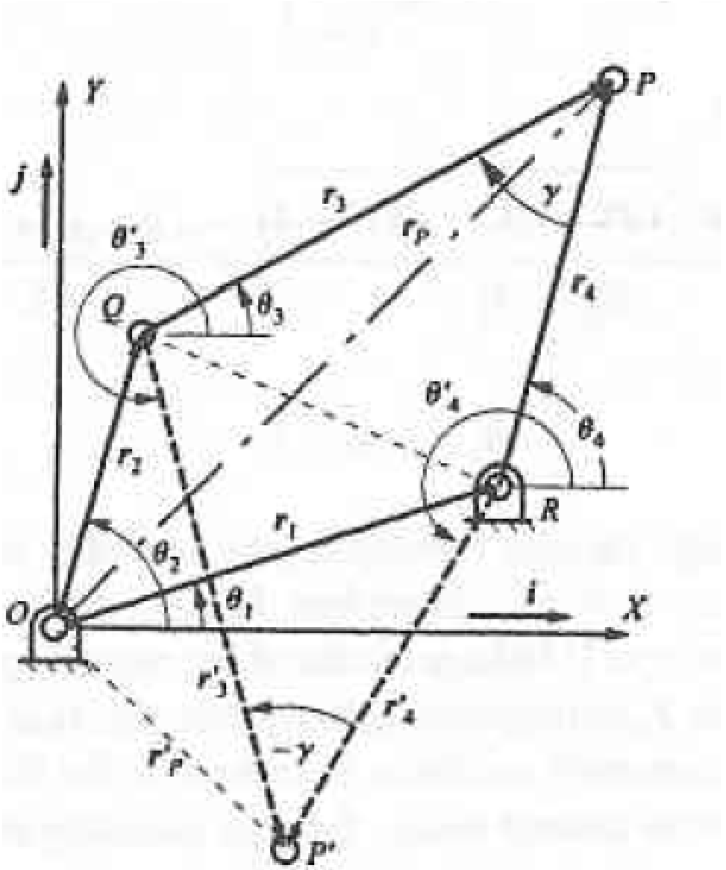
$$\theta_4 = 2\tan^{-1} t$$

پس از بدست آوردن θ_4 می توان معادلات حلقه را برای متغیر θ_3 حل نمود.

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2}\right]$$

واضح است که علامت صورت و مخرج کسر فوق معین می کند که θ_3 درکدام ربع قرار گرفته است لذا از تابع atan2 استفاده می شود.

$$\mathrm{ATAN2}(\sin\theta_3, \cos\theta_3) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3}\right].$$



همانطوریکه بحث شد برای هر مقدار θ_2 دو مقدار θ_3 و θ_4 بدست می آید.

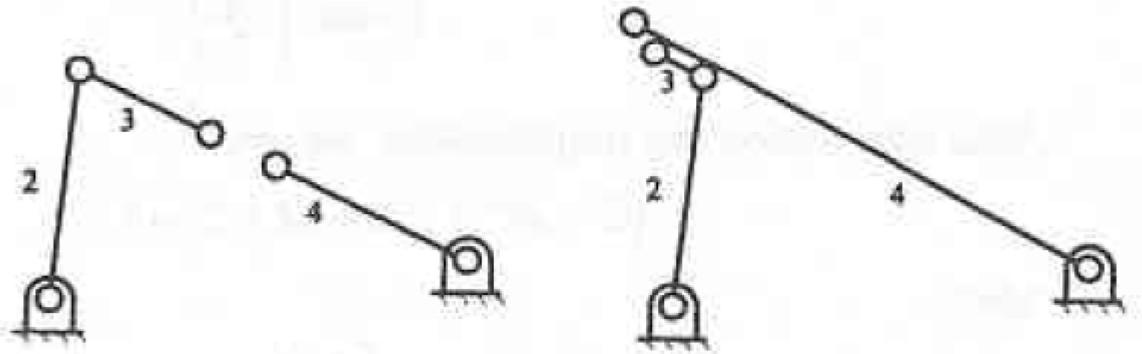
“ابهام در مونتاژ assembly ambiguity”

- P و P’ دو حل ممکن برای برای مسئله فوق است.
- توجه شود که دو حالت نسبت به خط QR متقارن می باشند.
- علامت γ در حل دوم معکوس شده است که می توان از آن به عنوان یک شاخص انتخاب حالت استفاده کرد.

- در چه صورت t موهومی است

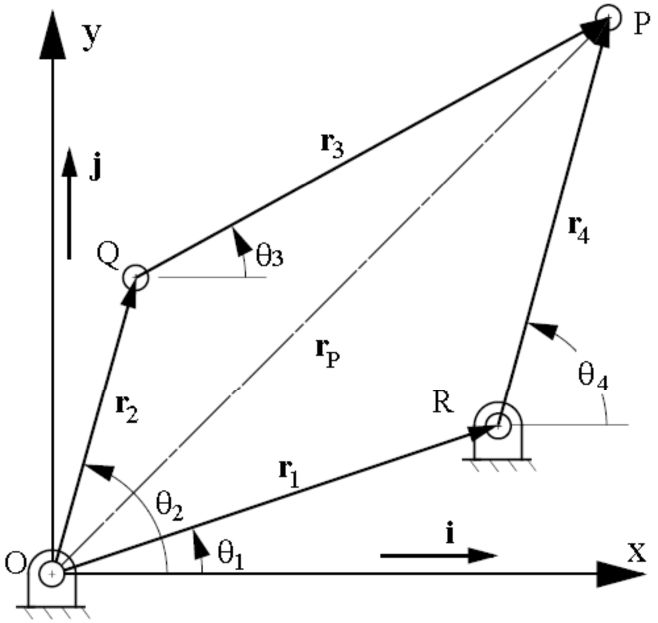
اگر $(A^2+B^2) < C^2$

در این صورت مکانیزم داده شده در موقعیت زاویه ای θ_2 نمی تواند مونتاژ شود.



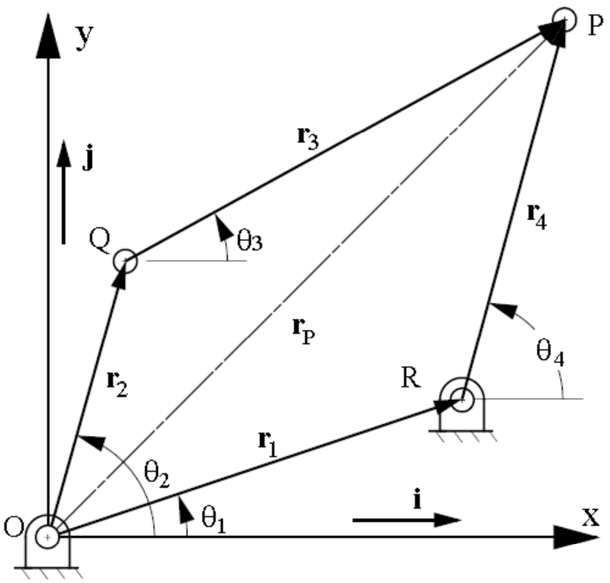
فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

- پس از تعیین زوایای موقعیت هر نقطه از مکانیزم چهار میله قابل محاسبه است.
- تمرین- معادلات موقعیت مکانیزم چهار میله را برای حالتی که coupler ورودی است بدست آورید.



- **معادلات سرعت مکانیزم چهار میله**

با مشتق گیری از معادلات حلقه بسته موقعیت داریم



$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4$$

توجه شود که در معادله فوق طول کلیه بازوها ثابت می باشند.

$$r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 = r_4\dot{\theta}_4 \sin\theta_4$$

$$r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = r_4\dot{\theta}_4 \cos\theta_4$$

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_2$ ورودی باشد مجهولات عبارتند از $\dot{\theta}_3$ and $\dot{\theta}_4$

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_3$ ورودی باشد مجهولات عبارتند از $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_4$

اگر به شکل معادلات توجه شود مشخص می شود که دستگاه معادلات خطی می باشد.
می توان معادلات سرعت به صورت ماتریس نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_J \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin\theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos\theta_M \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\dot{\theta}_2$
$M = 3$ and $J = 2$ for $\dot{\theta}_3$ as the input

وقتی سرعت زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان سرعت خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\begin{aligned} \dot{r}_P &= \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right)j \\ &= \dot{r}_1 + \dot{r}_4 = \left(-r_4\dot{\theta}_4 \sin\theta_4\right)i + \left(r_4\dot{\theta}_4 \cos\theta_4\right)j \end{aligned}$$

معادلات شتاب مکانیزم چهار میله

با مشتق گیری از معادلات سرعت معادلات شتاب حاصل می شود.

$$\ddot{r}_P = \ddot{r}_2 + \ddot{r}_3 = \ddot{r}_1 + \ddot{r}_4$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 = r_4\ddot{\theta}_4 \sin\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 = r_4\ddot{\theta}_4 \cos\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4$$

اگر $\ddot{\theta}_2$ و تمامی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_3$ and $\ddot{\theta}_4$

او وقتی که $\ddot{\theta}_3$ و تمامی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_4$

دستگاه فوق خطی بوده و به آسانی قابل حل است.

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_J \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin\theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos\theta_M + r_J \dot{\theta}_J^2 \cos\theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos\theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin\theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \sin\theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\ddot{\theta}_2$ as the input

$M = 3$ and $J = 2$ for $\ddot{\theta}_3$ as the input

وقتی شتاب زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان شتاب خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 &= -\left(r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3\right)\vec{i} \\ &\quad + \left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3\right)\vec{j} \\ &= \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4 = -\left(r_4\ddot{\theta}_4 \sin\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4\right)\vec{i} + \left(r_4\ddot{\theta}_4 \cos\theta_4 - r_4\dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4\right)\vec{j} \end{aligned}$$

خلاصه معادلات مورد نیاز برای حل موقعیت، سرعت و شتاب مکانیزم چهار میله

Position

$$A = 2r_1 r_4 \cos\theta_1 - 2r_M r_4 \cos\theta_M$$

$$B = 2r_1 r_4 \sin\theta_1 - 2r_M r_4 \sin\theta_M$$

$$C = r_1^2 + r_M^2 + r_4^2 - r_J^2 - 2r_1 r_M\left(\cos\theta_1 \cos\theta_M + \sin\theta_1 \sin\theta_M\right)$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B + \sigma\sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A}\right]; \qquad \sigma = \pm 1$$

$$\theta_J = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_M \sin\theta_M}{r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_M \cos\theta_M}\right]$$

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_2 = r_2\left(\cos\theta_2 \boldsymbol{i} + \sin\theta_2 \boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = r_2\left(\cos\theta_2 \boldsymbol{i} + \sin\theta_2 \boldsymbol{j}\right) + r_3\left(\cos\theta_3 \boldsymbol{i} + \sin\theta_3 \boldsymbol{j}\right)$$
$$= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_4 = r_1\left(\cos\theta_1 \boldsymbol{i} + \sin\theta_1 \boldsymbol{j}\right) + r_4\left(\cos\theta_4 \boldsymbol{i} + \sin\theta_4 \boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_R = \boldsymbol{r}_1 = r_1\left(\cos\theta_1 \boldsymbol{i} + \sin\theta_1 \boldsymbol{j}\right)$$

Velocity

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot\theta_J \\ \dot\theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \dot\theta_M \sin\theta_M \\ r_M \dot\theta_M \cos\theta_M \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_Q = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = r_2\dot\theta_2\left(-\sin\theta_2 \boldsymbol{i} + \cos\theta_2 \boldsymbol{j}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \left(-r_4\dot\theta_4 \sin\theta_4\right)\boldsymbol{i} + \left(r_4\dot\theta_4 \cos\theta_4\right)\boldsymbol{j}$$

Acceleration

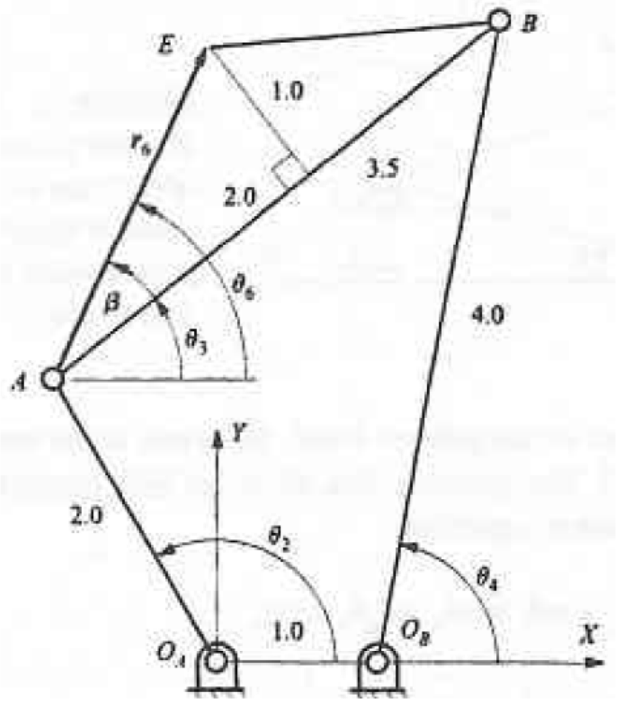
$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot\theta_J \\ \ddot\theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \ddot\theta_M \sin\theta_M + r_M \dot\theta_M^2 \cos\theta_M + r_J \dot\theta_J^2 \cos\theta_J - r_4 \dot\theta_4^2 \cos\theta_4 \\ r_M \ddot\theta_M \cos\theta_M - r_M \dot\theta_M^2 \sin\theta_M - r_J \dot\theta_J^2 \sin\theta_J + r_4 \dot\theta_4^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \left(-r_2\ddot\theta_2 \sin\theta_2 - r_2\dot\theta_2^2 \cos\theta_2\right)\boldsymbol{i} + \left(r_2\ddot\theta_2 \cos\theta_2 - r_2\dot\theta_2^2 \sin\theta_2\right)\boldsymbol{j}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = -\left(r_4\ddot\theta_4 \sin\theta_4 + r_4\dot\theta_4^2 \cos\theta_4\right)\boldsymbol{i} + \left(r_4\ddot\theta_4 \cos\theta_4 - r_4\dot\theta_4^2 \sin\theta_4\right)\boldsymbol{j}$$

مثال: در مکانیزم زیر در صورتی که $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3.5, r_4 = 4, \text{ and } \theta_1 = 0$ باشد، مقادیر $\theta_3 \text{ and } \theta_4$ را برای هر یک از حالات حل بدست آورید.

$\theta_2 = 0, \pi/2, \pi, \text{ and } -\pi/2$



for $\theta_2 = 0$

$$A = 2r_1r_4\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_2 = 2(1)(4) - 2(2)(4) = -8$$

$$B = 2r_1r_4\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_2 = 0$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = 1^2 + 2^2 + 4^2 - 3.5^2 - 2(1)(2) = 4.75$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B + \sigma\sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{-0 + \sqrt{0^2 - 4.75^2 + (-8)^2}}{4.75 + 8}\right] = 2\tan^{-1}(0.5049) = 53.58°$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_2\cos\theta_2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{4\sin(53.58°)}{1 + 4\cos(53.58°) - 2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{3.2187}{1.3748}\right] = \tan^{-1}(2.3412) = 66.87°$$

جدول خلاصه نتایج

θ_2	σ	A	B	C	θ_4	θ_3
0	1	−8	0	4.75	53.58°	66.87°
	−1				−53.58°	−66.87°
$\pi/2$	1	87	−16	8.75	177.28°	−143.85°
	−1				55.85°	21.98°
π	1	24	0	12.75	−122.09°	−75.52°
	−1				122.09°	75.52°
$-\pi/21$	1	8	16	8.75	−55.85°	−21.98°
	−1				−177.28°	148.85°

در صورتی که $\dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad/s and } \ddot{\theta}_2 = 0$ مقادیر $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$ برای حالت $\theta_2 = 0$ محاسبه نمایید.

$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin\theta_3 & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_3 \cos\theta_3 & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3.5\sin(66.87^\circ) & 4\sin(53.58^\circ) \\ -3.5\cos(66.87^\circ) & 4\cos(53.58^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2(10)\sin(0^\circ) \\ 2(10)\cos(0^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\theta}_3 = 20 \text{ rad/s and } \dot{\theta}_4 = 20.0 \text{ rad/s}$$

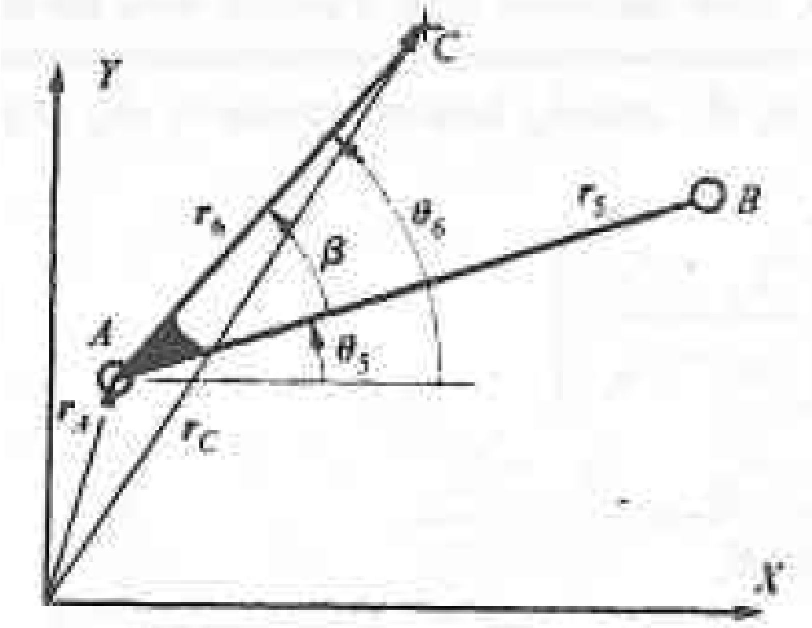
$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin\theta_3 & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_3 \cos\theta_3 & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4 \\ r_2 \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + 2(10)^2 + 3.5(20)^2 \cos(66.87^\circ) - 4(20)^2 \cos(53.58^\circ) \\ 0 - 0 - 3.5(20)^2 \sin(66.87^\circ) + 4(20)^2 \sin(53.58^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200.0265 \\ -0.0363 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\theta}_3 = 147.5634 \text{ rad/s}^2 \text{ and } \ddot{\theta}_4 = 85.4150 \text{ rad/s}^2$$

معادلات تحلیلی برای جسم صلب پس از تعیین سینماتیک دو نقطه

حالت اول: $\theta_5, \dot{\theta}_5$, and $\ddot{\theta}_5$ are known



$$r_C = r_A + r_6$$

$$r_C = r_A + r_6\left(\cos\theta_6 i + \sin\theta_6 j\right)$$

$$\theta_6 = \beta + \theta_5$$

$$\dot{r}_C = \dot{r}_A + r_6\dot{\theta}_5\left(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j\right)$$

$$\ddot{r}_C = \ddot{r}_A + r_6\ddot{\theta}_5\left(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j\right) - r_6\dot{\theta}_5^2\left(\cos\theta_6 i + \sin\theta_6 j\right)$$

حالت دوم: وقتی سینماتیک دو نقطه از جسم داده شده است.

$$\theta_5 = \tan^{-1}\left[\frac{r_{B_y} - r_{A_y}}{r_{B_x} - r_{A_x}}\right]$$

$$\dot{r}_B = \dot{r}_A + r_5\dot{\theta}_5\left(-\sin\theta_5 i + \cos\theta_5 j\right)$$

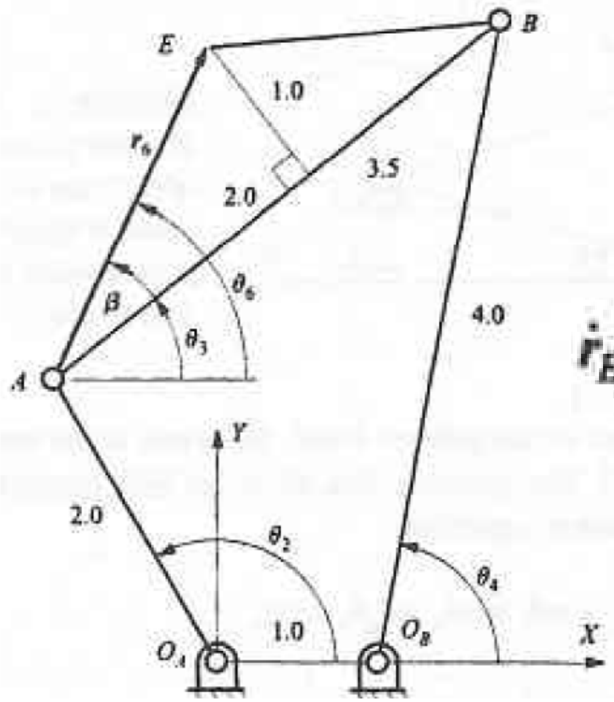
$$\dot{\theta}_5 = -\frac{\dot{r}_{B_x} - \dot{r}_{A_x}}{r_5 \sin\theta_5} = \frac{\dot{r}_{B_y} - \dot{r}_{A_y}}{r_5 \cos\theta_5}$$

$$\ddot{r}_B = \ddot{r}_A + r_5\ddot{\theta}_5\left(-\sin\theta_5 i + \cos\theta_5 j\right) - r_5\dot{\theta}_5^2\left(\cos\theta_5 i + \sin\theta_5 j\right)$$

$$\ddot{\theta}_5 = -\frac{\left(\ddot{r}_{B_x} - \ddot{r}_{A_x}\right) + r_5\dot{\theta}_5^2 \cos\theta_5}{r_5 \sin\theta_5} = \frac{\left(\ddot{r}_{B_y} - \ddot{r}_{A_y}\right) + r_5\dot{\theta}_5^2 \sin\theta_5}{r_5 \cos\theta_5}$$

مثال: در مثال قبل سرعت و شتاب نقطه E_3 را بدست آورید.

$r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3.5,\ r_4 = 4, \text{ and } \theta_1 = 0$



$\theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad/s},\ \ddot{\theta}_2 = 0, \text{ and } \sigma = 1$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.565°$$

$$r_6 = AE = 2.0/\cos(26.565°) = 2.236 \text{ cm}$$

$$\dot{r}_{E_3} = r_2\dot{\theta}_2(-\sin\theta_2 i + \cos\theta_2 j) + r_6\dot{\theta}_3(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j)$$

$\theta_2 = 0,\ \theta_3 = 66.87°,\ \dot{\theta}_2 = 10.0 \text{ rad/s, and } \dot{\theta}_3 = 20.0 \text{ rad/s}$

$$\theta_6 = \theta_3 + \beta = 66.87° + 26.565° = 93.435°$$

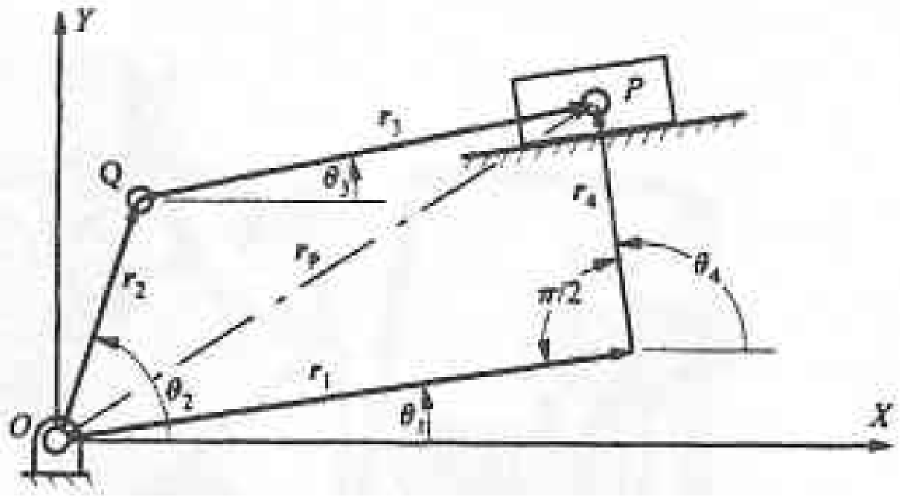
$$\dot{r}_{E_3} = 2(10)(0i + j) + 2.236(20.0)(-\sin(93.435°)i + \cos(93.435°)j)$$
$$= 20j - 44.640i - 2.679j = -44.64i + 17.32j \text{ cm/s}$$

$$\ddot{r}_{E_3} = r_2\ddot{\theta}_2\left(-\sin\theta_2 i + \cos\theta_2 j\right) - r_2\dot{\theta}_2^2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right)$$
$$+ r_6\ddot{\theta}_3\left(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j\right) - r_6\dot{\theta}_3^2\left(\cos\theta_6 i + \sin\theta_6 j\right)$$

$\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 66.87°$, $\dot{\theta}_2 = 10.0$ rad/s, $\ddot{\theta}_2 = 0$ rad/s^2, $\dot{\theta}_3 = 20.0$ rad/s, and $\ddot{\theta}_3 = 147.56$ rad/s^2

$$\ddot{r}_{E_3} = 0 - 2(10)^2\left(i + 0j\right) + 2.236(147.56)\left[-\sin(93.435°)i + \cos(93.435°)j\right]$$
$$-2.236(20.0)^2\left[\cos(93.435°)i + \sin(93.435°)j\right] = -475.76i - 912.56j \text{ cm/s}^2$$

معادلات تحلیلی برای مکانیزم لغزنده و لنگ



$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4$$

$$\theta_4 = \theta_1 + \pi/2$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4$$

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4$$

معادلات فوق باید در کل سیکل حرکت مکانیزم بر قرار باشد.
توجه نمایید که اندازه بردار r_1 تغییر می کند اما راستای آن (θ_1) ثابت است.

r_2, r_3, r_4, θ_1, and θ_4 are constants

If θ_2 is given, solve θ_3 and r_1 in terms of θ_2

if θ_3 is given solve θ_2 and r_1 in terms of θ_3

حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که θ2 ورودی است

مجهولات r_1 و θ_3

$$r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2$$

$$r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2$$

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4(\cos\theta_1 \cos\theta_4 + \sin\theta_1 \sin\theta_4)$$
$$-2r_1r_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) - 2r_2r_4(\cos\theta_2 \cos\theta_4 + \sin\theta_2 \sin\theta_4)$$

$$A = 2r_4(\cos\theta_1 \cos\theta_4 + \sin\theta_1 \sin\theta_4) - 2r_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

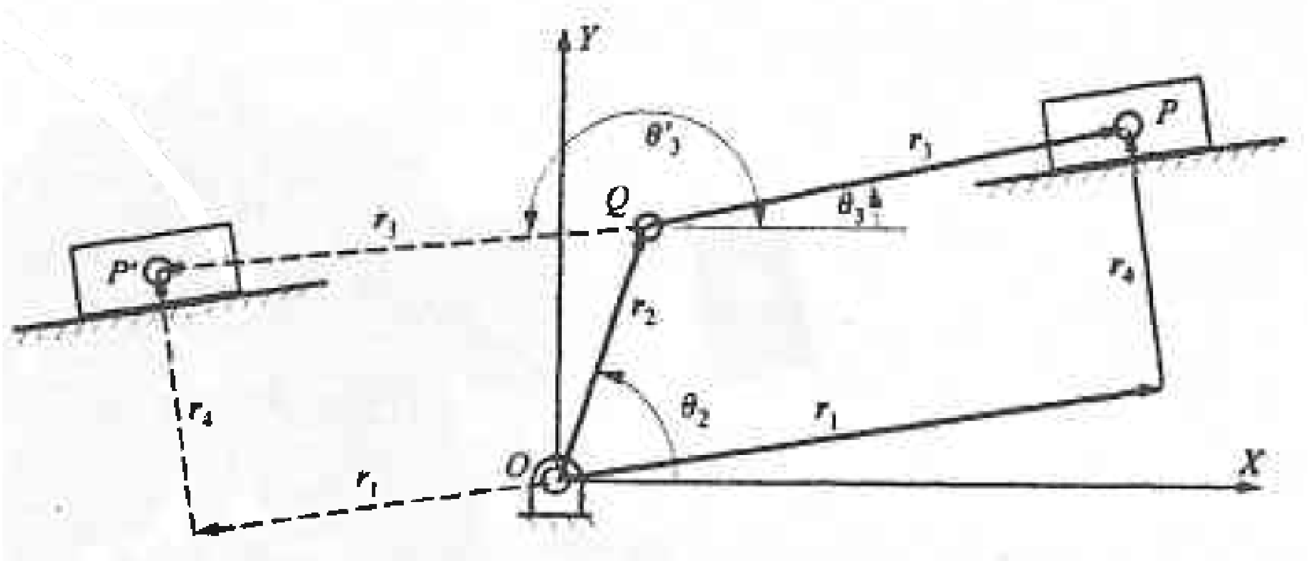
$$B = r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_2r_4(\cos\theta_2 \cos\theta_4 + \sin\theta_2 \sin\theta_4)$$

$$r_1^2 + Ar_1 + B = 0$$

- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

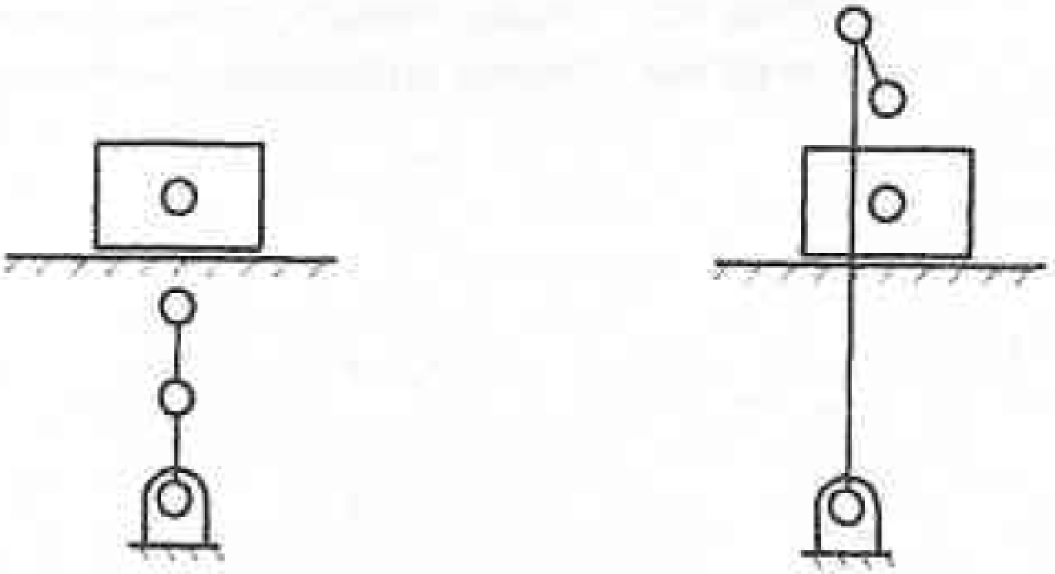
$$r_1 = \frac{-A + \sigma\sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode



- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

r_1 can be complex $(A^2 < 4B)$



مکانیزم قابل مونتاژ نیست

وقتی که r_1 محاسبه شده، می توان از معادلات حلقه بسته θ_3 را بدست آورد.

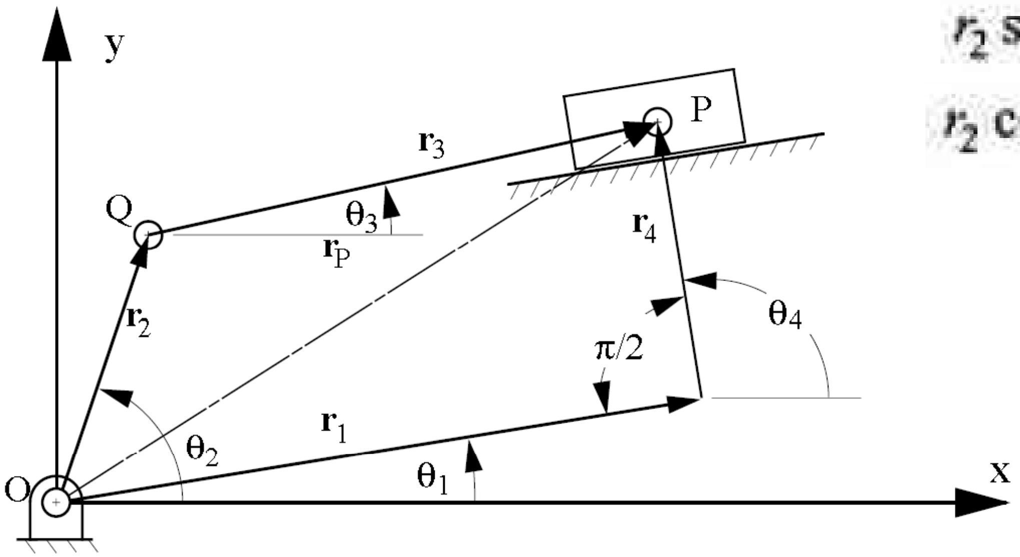
$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2}\right]$$

با استفاده از تابع atan2 می توان ناحیه مثلثاتی θ_3 را تعیین کرد.

پس از محاسبه کمیات مجهول می توان مختصات هر نقطه روی حلقه برداری را محاسبه نمود.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = r_2\left(\cos\theta_2 \mathbf{i} + \sin\theta_2 \mathbf{j}\right) + r_3\left(\cos\theta_3 \mathbf{i} + \sin\theta_3 \mathbf{j}\right)$$

حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که r_1 ورودی است



$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4$$

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4$$

با حذف r_3 در معادلات فوق داریم :

$$A\cos\theta_2 + B\sin\theta_2 + C = 0$$

$$A = -2r_1r_2\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_4$$

$$B = -2r_1r_2\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_4$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 + 2r_1r_4(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4)$$

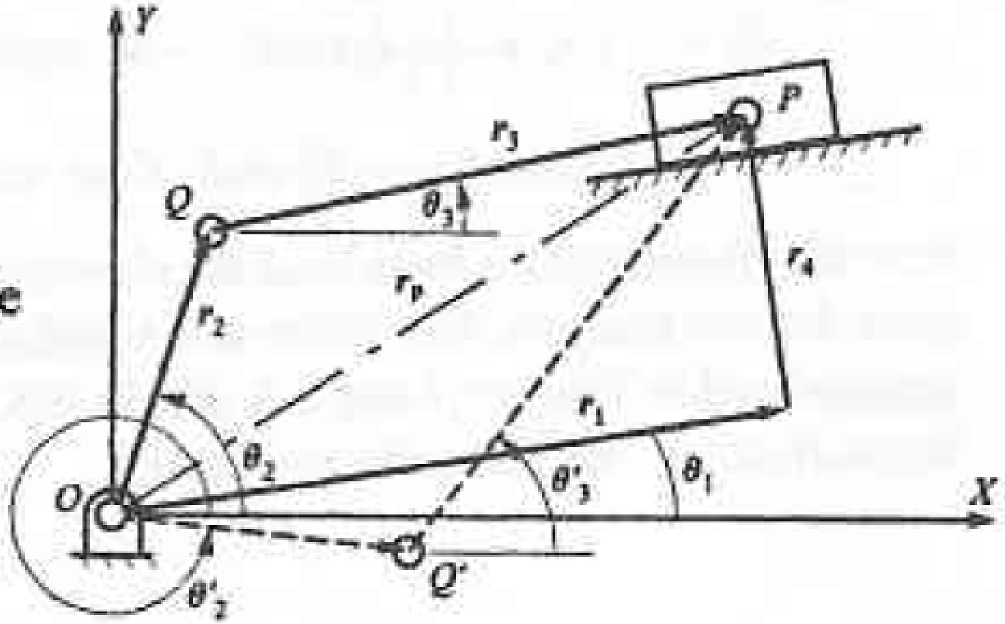
$$A(1-t^2)+B(2t)+C(1+t^2)=0$$

$$t=\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \Rightarrow (C-A)t^2+2Bt+(A+C)=0$$

$$t=\frac{-2B+\sigma\sqrt{4B^2-4(C-A)(C+A)}}{2(C-A)}=\frac{-B+\sigma\sqrt{B^2-C^2+A^2}}{C-A}$$

$$\theta_2=2\tan^{-1}t$$

$\sigma=\pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode



حل سرعت مکانیزم لغزنده و لنگ

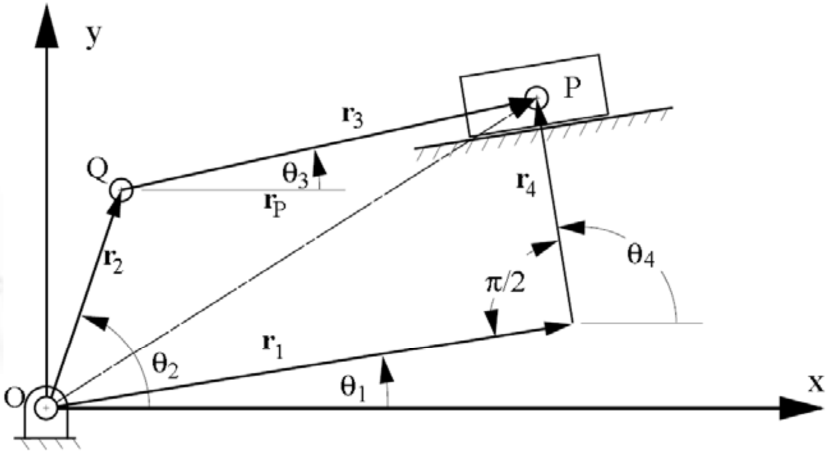
$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4$$

$$-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 = \dot{r}_1 \cos\theta_1$$

$$r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = \dot{r}_1 \sin\theta_1$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & r_J \sin\theta_J \\ \sin\theta_1 & -r_J \cos\theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M\dot{\theta}_M \sin\theta_M \\ r_M\dot{\theta}_M \cos\theta_M \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,
$M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.



If $\dot{r}_1$ is input,
then $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin\theta_2 & -r_3 \sin\theta_3 \\ r_2 \cos\theta_2 & r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{r}_1 \sin\theta_1 \end{Bmatrix}$$

حل شتاب مکانیزم لغزنده و لنگ

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4$$

$$-r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 - r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 = \ddot{r}_1 \cos\theta_1$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 = \ddot{r}_1 \sin\theta_1$$

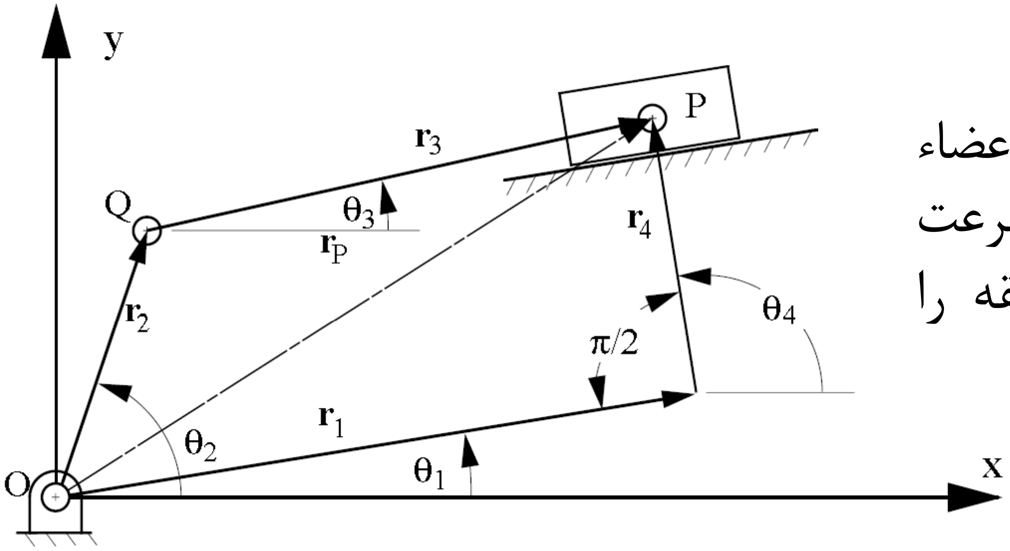
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & r_J \sin\theta_J \\ \sin\theta_1 & -r_J \cos\theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M\ddot{\theta}_M \sin\theta_M - r_M\dot{\theta}_M^2 \cos\theta_M - r_J\dot{\theta}_J^2 \cos\theta_J \\ r_M\ddot{\theta}_M \cos\theta_M - r_M\dot{\theta}_M^2 \sin\theta_M - r_J\dot{\theta}_J^2 \sin\theta_J \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,
$M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.

If $\ddot{r}_1$ is input, then $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin\theta_2 & -r_3 \sin\theta_3 \\ r_2 \cos\theta_2 & r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 + \ddot{r}_1 \cos\theta_1 \\ r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 + \ddot{r}_1 \sin\theta_1 \end{Bmatrix}$$

سرعت و شتاب نقطه P



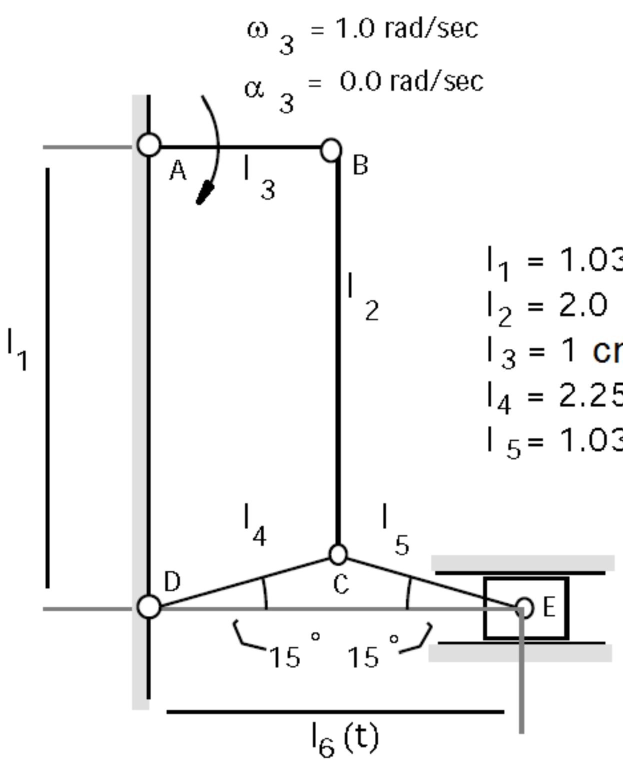
وقتی سرعت و شتاب زاویه ای اعضاء محاسبه شدند، براحتی می توان سرعت و شتاب خطی هر نقطه روی حلقه را بدست آورد.

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right)j$$

$$\ddot{r}_P = \ddot{r}_2 + \ddot{r}_3 = -\left(r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3\right)i$$
$$+\left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3\right)j$$

تمرینات و مسائل فصل ۷ قسمت اول

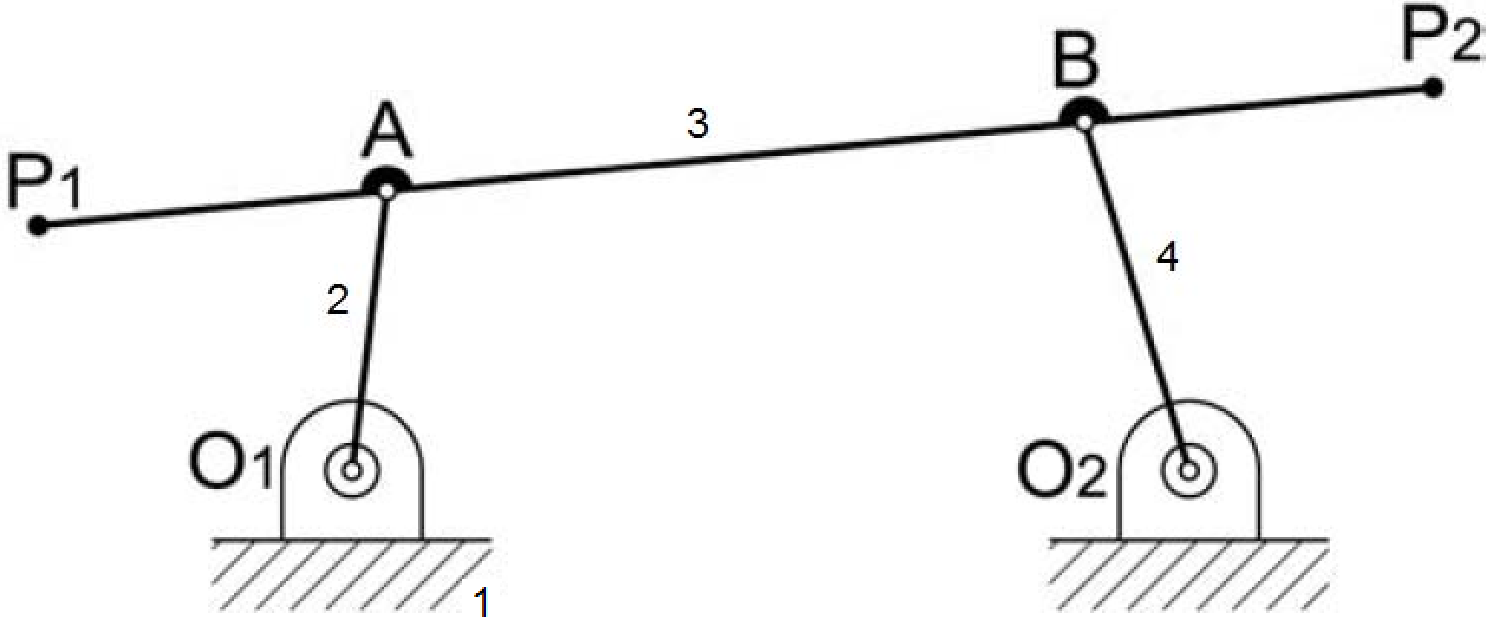
۱- با استفاده از روش تحلیلی سرعت و شتاب زاویه ای بازوهای ۲، ۴ و ۵ را بدست آورده سپس شتاب خطی نقطه **E** را محاسبه نمایید.



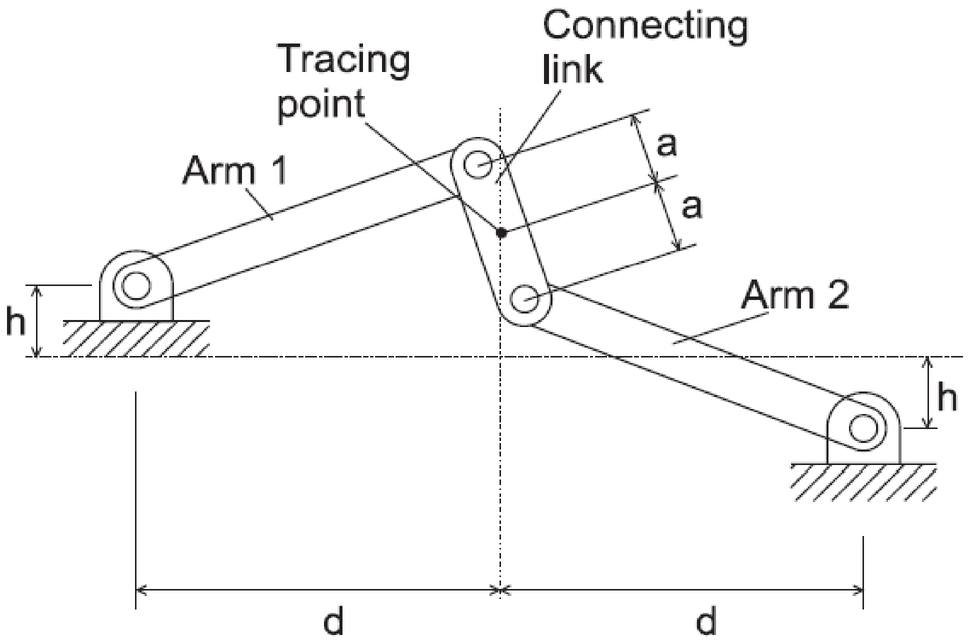
l_1 = 1.035 cm
l_2 = 2.0 cm
l_3 = 1 cm
l_4 = 2.259 cm
l_5 = 1.035 cm

velocity scale: 1cm/sec = 2 cm
acceleration scale: 1cm/sec^2 = 2 cm

۲- در مکانیزم چهار میله زیر اگر عضو ۲ محرک باشد، معادلات تغییر مکان، سرعت و شتاب نقاط P_1 و P_2 را بدست آورده و برای یک سیکل حرکت آنها را رسم نمایید.



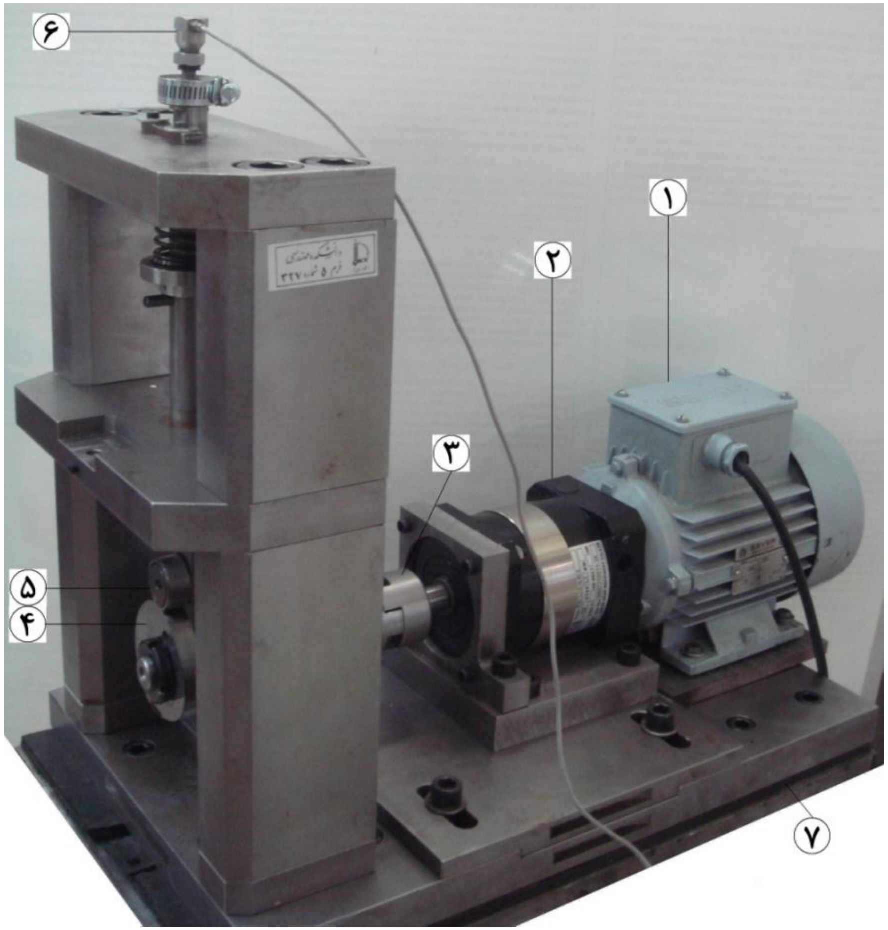
۳- در مکانیزم چهار میله double-rocker نشان داده شده چه رابطه ای باید بین ابعاد اعضاء برقرار باشد تا coupler دوران کامل داشته باشد. مسیر حرکت (tracing point) را رسم نمایید.



2a = 1 cm, h = 0.5 cm, 2d = 10 cm, and that the arms have equal length 7 cm.

پایان

فصل ۸ طراحی بادامک ها



۱-موتور الکتریکی ،

۲- گیربکس خورشیدی ،

۳- کوپلینگ ،

۴- بادامک ،

۵- پیرو ،

۶- شتاب سنج ،

۷- لاستیک

فصل ۸ طراحی بادامک ها

بادامکها برای حرکات و مشخصات محدودتری نسبت مکانیزمهای میله ای استفاده می شوند.

در حقیقت هر نوع حرکت مورد نظر با پروفیل بادامک قابل تولید است.

معایب بادامکها عبارتند از:

هزینه ساخت

مقاومت سایشی کم

قابلیتهای کم در سرعتهای زیاد

فصل ۸ طراحی بادامک ها

از نقطه نظر هندسی طراحی بادامک معمولا در دو مرحله انجام می شود.

۱- سنتز برنامه حرکت (motion program) دنبال کننده

۲- ایجاد پروفیل بادامک

در اکثر اوقات برنامه حرکت برای قسمت هایی از سیکل حرکت داده شده و سایر قسمت های باقیمانده پروفیل باید برای کارآئی دینامیکی بهینه طراحی شوند.

در مرحله دوم ، پروفیل بادامک از طریق معکوس سینماتیکی (kinematic inversion) انجام می گردد. بادامک ثابت در نظر گرفته شده و موقعیت های مورد نظر دنبال کننده نسبت به بادامک رسم می شود.

در نهایت ، یک منحنی در نقاط بدست آمده مماس بر دنبال کننده رسم می شود.

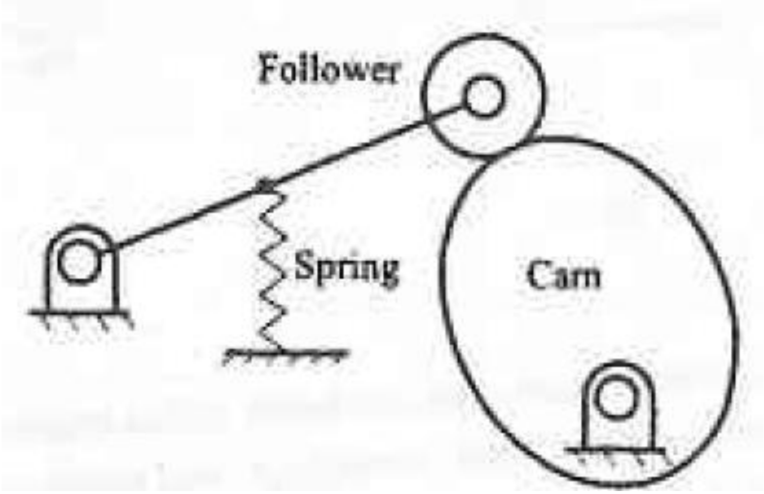
سیستمهای بادامک-پیرو

یک سیستم بادامک-پیرو از سه جزء اصلی تشکیل شده است:

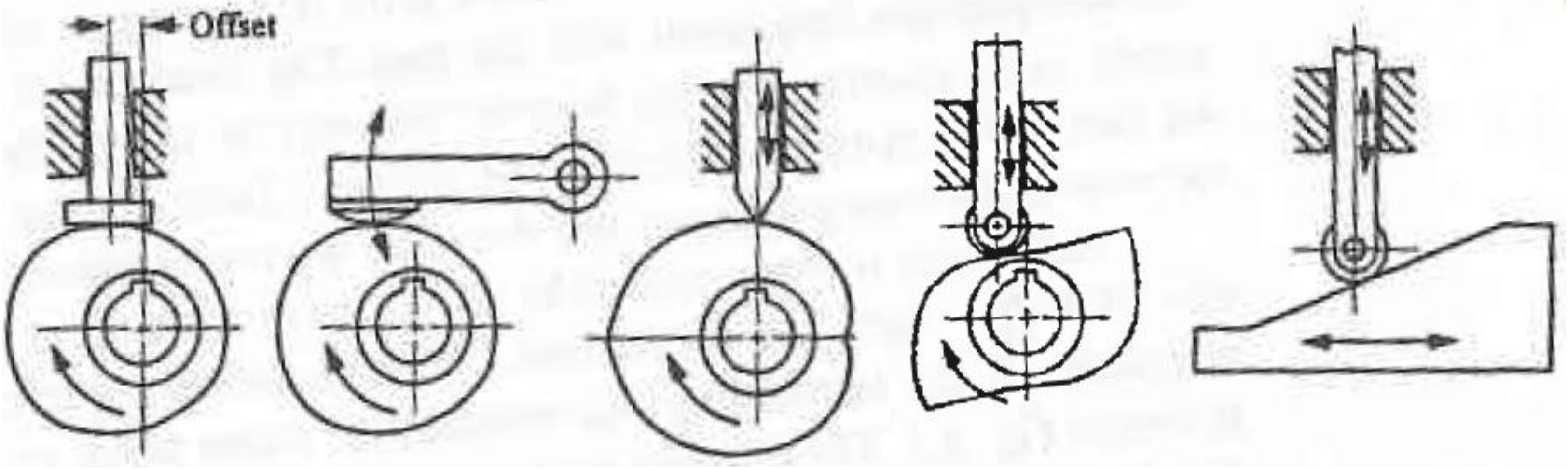
۱- بادامک

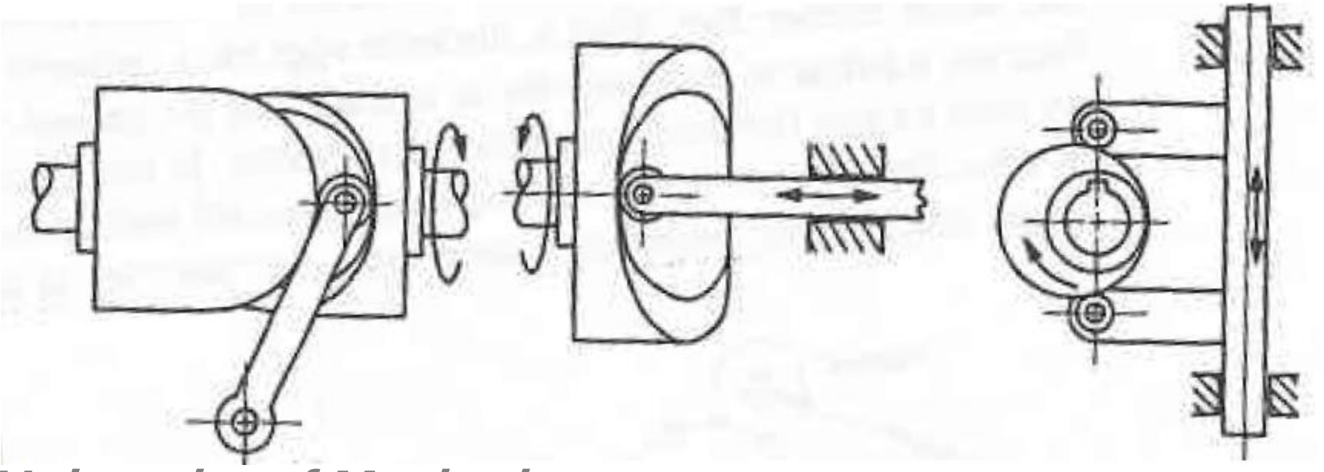
۲- دنبال کننده

۳- فنر یا مکانیزم ایجاد تماس



انواع مکانیزمهای بادامکی





سنتز برنامه حرکت (Synthesis of Motion Program)

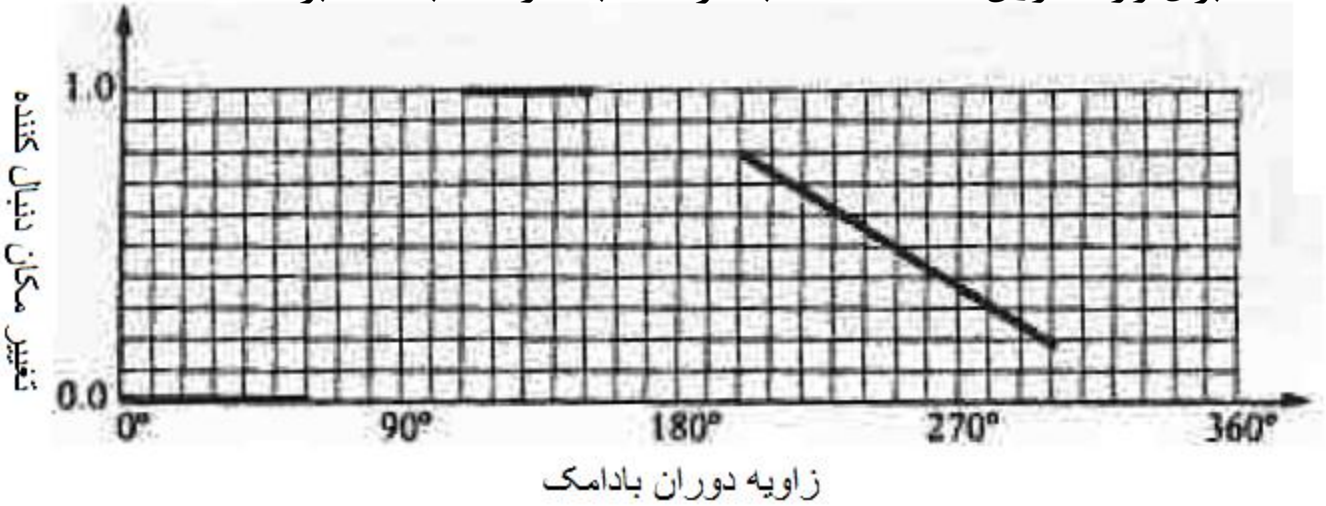
در واقع قسمتهایی از سیکل حرکت که معین نشده اند بصورت بهینه محاسبه می شوند.

در نظر بگیرید که

۱- دنبال کننده برای زاویه دوران °۶۰ در صفر ثابت بماند Dwell

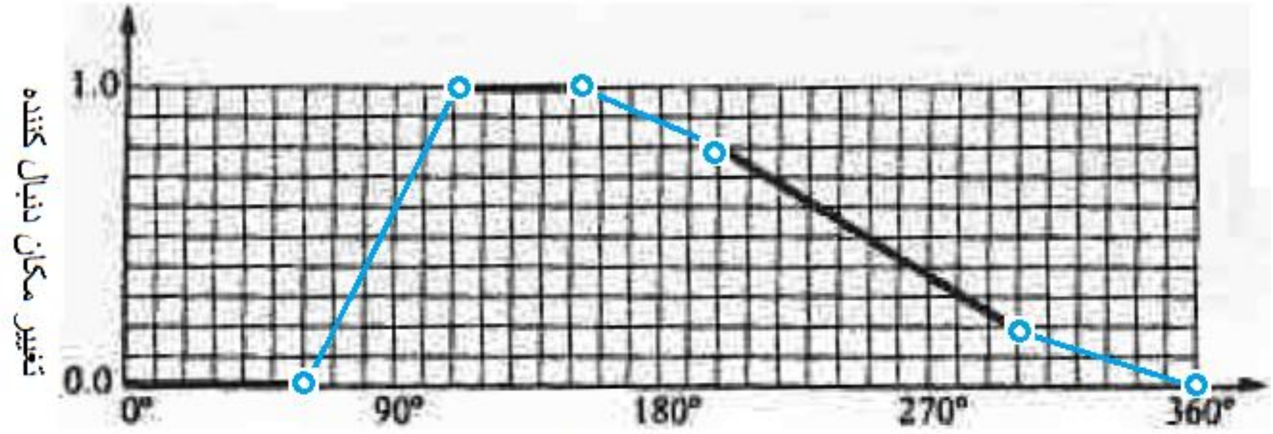
۲- دنبال کننده برای زاویه دوران °۱۵۰-۱۱۰ در یک ثابت بماند Dwell

۳- دنبال کننده برای زاویه دوران °۳۰۰-۲۰۰ با سرعت ثابت از ۰.۸ به ۰.۲ برسد.



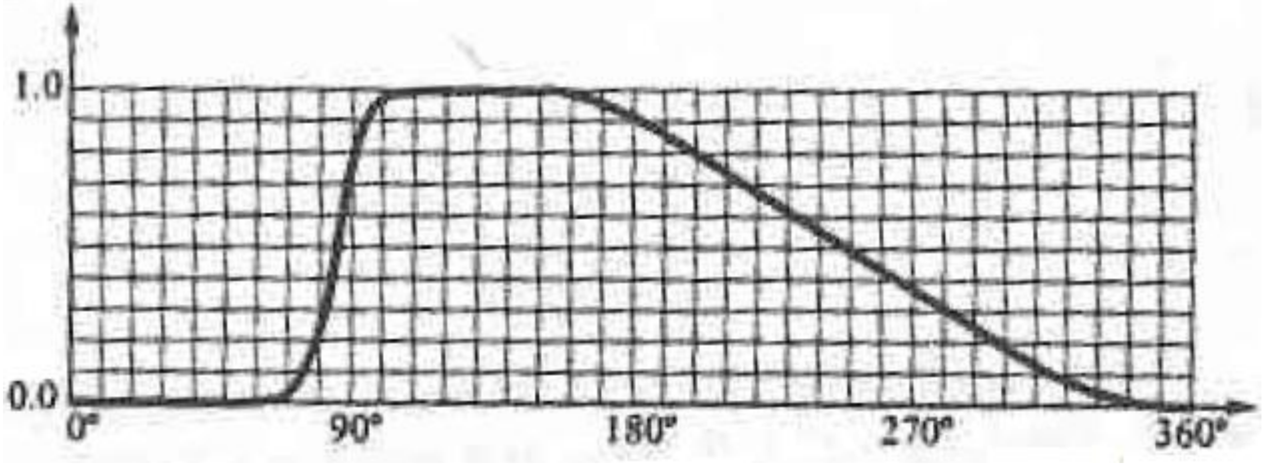
فصل ۸ طراحی بادامک ها

در صورتی که انتهای تغییر مکان مورد نظر با خطوط مستقیم متصل شوند ، در نقاط اتصال سرعت ناپیوسته و شتاب بنهایت خواهد بود که در نتیجه اتصال قطع شده یا مشکل تنشهای تماسی زیاد پیش خواهد آمد.



مشکل شتاب بینهایت از طریق مطابقت تغییرات موقعیت ، سرعت و شتاب در نقاط اتصال رفع میگردد. در واقع هر قسمت اتصال از سه ناحیه شتاب مثبت ، سرعت ثابت و شتاب منفی تشکیل شده است.

روابط شتاب ثابت



$$v = v_0 + at$$

$$y = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

در صورتی که بادامک
با سرعت ثابت دورا کند

$$t = \frac{(\theta - \theta_0)}{\omega}$$

$$v = v_0 + a\frac{(\theta - \theta_0)}{\omega}$$

$$y = s_0 + v_0 \frac{(\theta - \theta_0)}{\omega} + a\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\omega^2}$$

تحلیل انواع مختلف توابع تغییر مکان دنبال کننده

توابع متعددی برای اتصال قسمتهای دیاگرام تغییر مکان استفاده می شوند. شکل نهائی بادامک در نهایت به پروفیل تغییر مکان بستگی خواهد داشت. انواع حرکات عبارتند از:

۱- حرکت یکنواخت

۲- حرکت سهموی

۳- حرکت هامونیکی ساده

۴- حرکت سیکلوئیدی

۵- حرکت چند جمله ای

چهار نوع اول را می توان بصورت ترسیمی یا تحلیلی ایجاد نمود ، در حالیکه نوع پنجم فقط از روش تحلیل ایجاد می شود.

در روش حل ترسیمی یا تحلیلی فرض این است که سرعت زاویه ای بادامک ثابت است:

$$y = y(\theta)$$
$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

θ و y می توانند خطی و یا زاویه ای باشند

با استفاده از روابط فوق می توان حرکت را به صورت تابعی از زمان نمایش داد.

$$\dot{y} = \frac{dy(\theta)}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y(\theta)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2 y}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2 y}{d\theta^2}\omega^2 + \frac{dy}{d\theta}\alpha$$

ω is constant, $\alpha = 0$

$$\ddot{y} = y''\omega^2$$

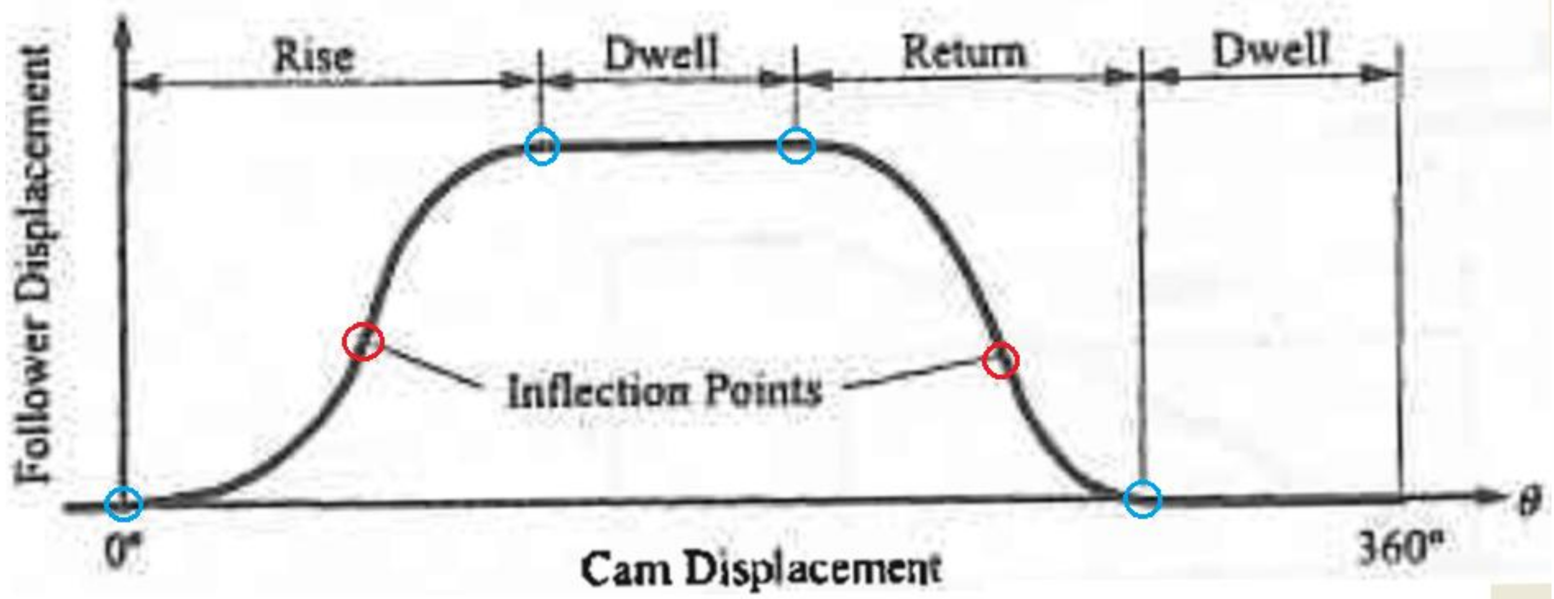
بنابر این در حالتیکه سرعت بادامک ثابت است داریم:

$\dot{y}$ is a simple constant times y'

$\ddot{y}$ is also a constant times y''

منحنی حرکت دنبال کننده به سه قسمت تقسیم می شود:

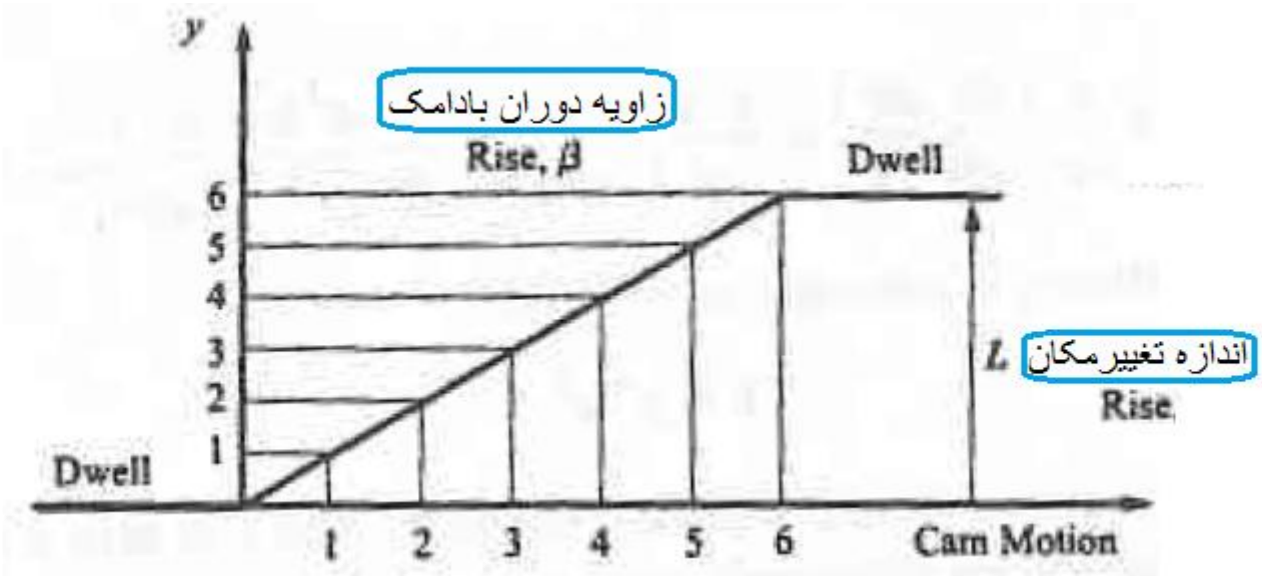
خواص نقاط مشخص شده را بررسی نمایید



حرکت یکنواخت Uniform Motion

شکل عمومی منحنی

$y = C\theta$

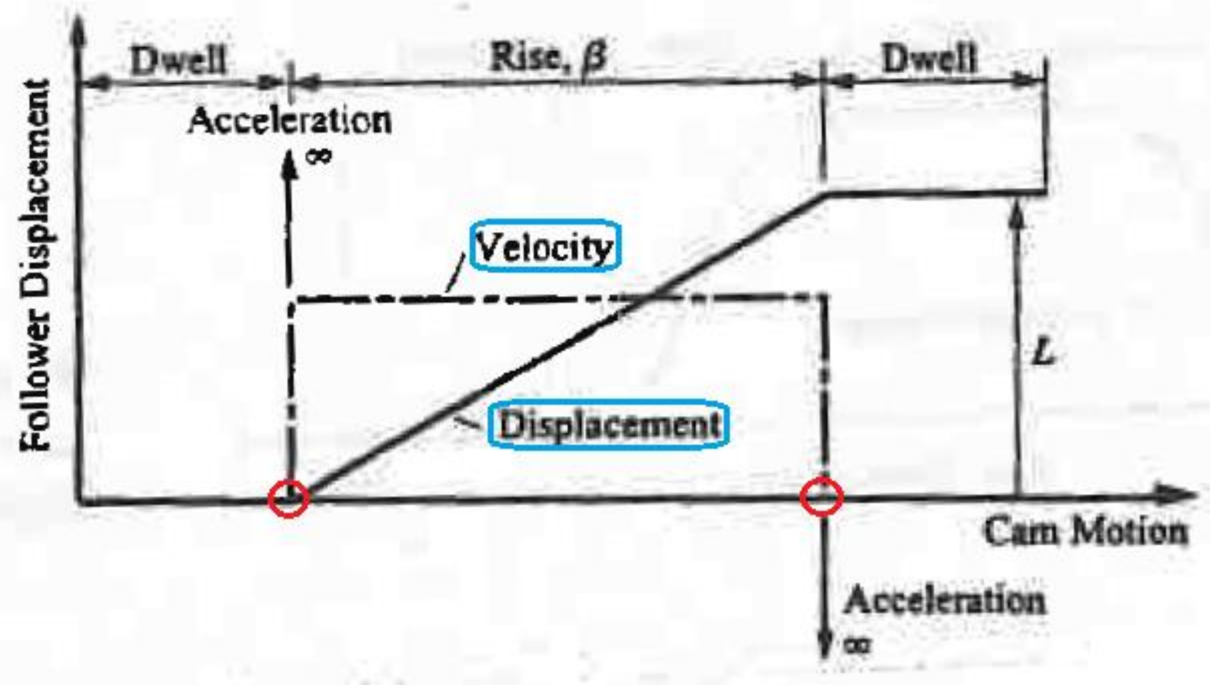


حرکت یکنواخت

$$y=\frac{L}{\beta}\theta$$

$$\dot{y}=\frac{L}{\beta}\omega$$

$$\ddot{y}=0$$



حرکت سهموی Parabolic Motion

توجه نمایید که در هر انتقال از دو سهمی باید استفاده شود

$$y = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2$$
$$y' = C_1 + 2C_2\theta$$
$$y'' = 2C_2$$

اگر در شروع حرکت $\theta=0$ و $y=y'=0$ باشد ، داریم

$$C_0 = C_1 = 0$$

اگر فرض شود در نقطه میانی

$$\theta = \beta/2, y = L/2$$

$$C_2 = 2L/\beta^2$$

در قسمت اول Rise

تغییرمکان و مشتق اول و دوم آن نسبت به θ

$$y = 2L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2$$

$$y' = 4\frac{L}{\beta^2}\theta$$

$$y'' = 4\frac{L}{\beta^2}$$

سرعت و شتاب

$$\dot{y} = 4\frac{L\omega}{\beta^2}\theta$$

$$\ddot{y} = 4\frac{L\omega^2}{\beta^2}$$

در قسمت دوم Rise

$\theta = \beta/2, y = L/2,$

$\theta = \beta, y = L, \text{ and } y' = 0$

$$\frac{L}{2} = C_0 + C_1\frac{\beta}{2} + C_2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

$$L = C_0 + C_1\beta + C_2\beta^2$$

$$0 = C_1 + 2C_2\beta$$

linear set of equations

$$C_0 = -L$$

$$C_1 = \frac{4L}{\beta}$$

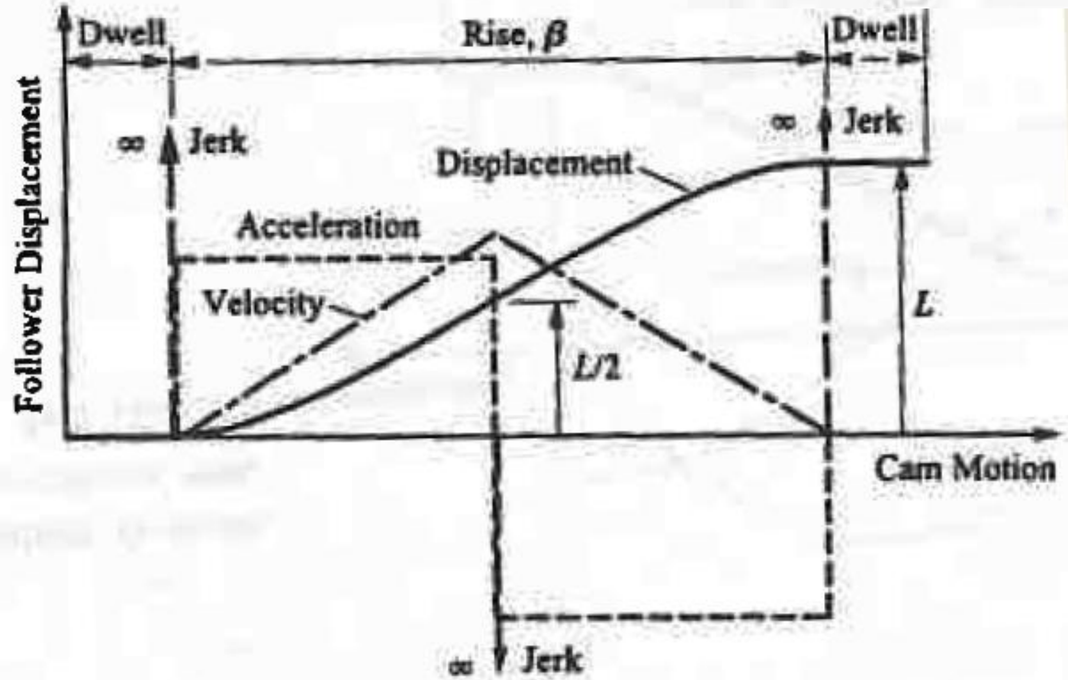
$$C_2 = -\frac{2L}{\beta^2}$$

$$y = L\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$

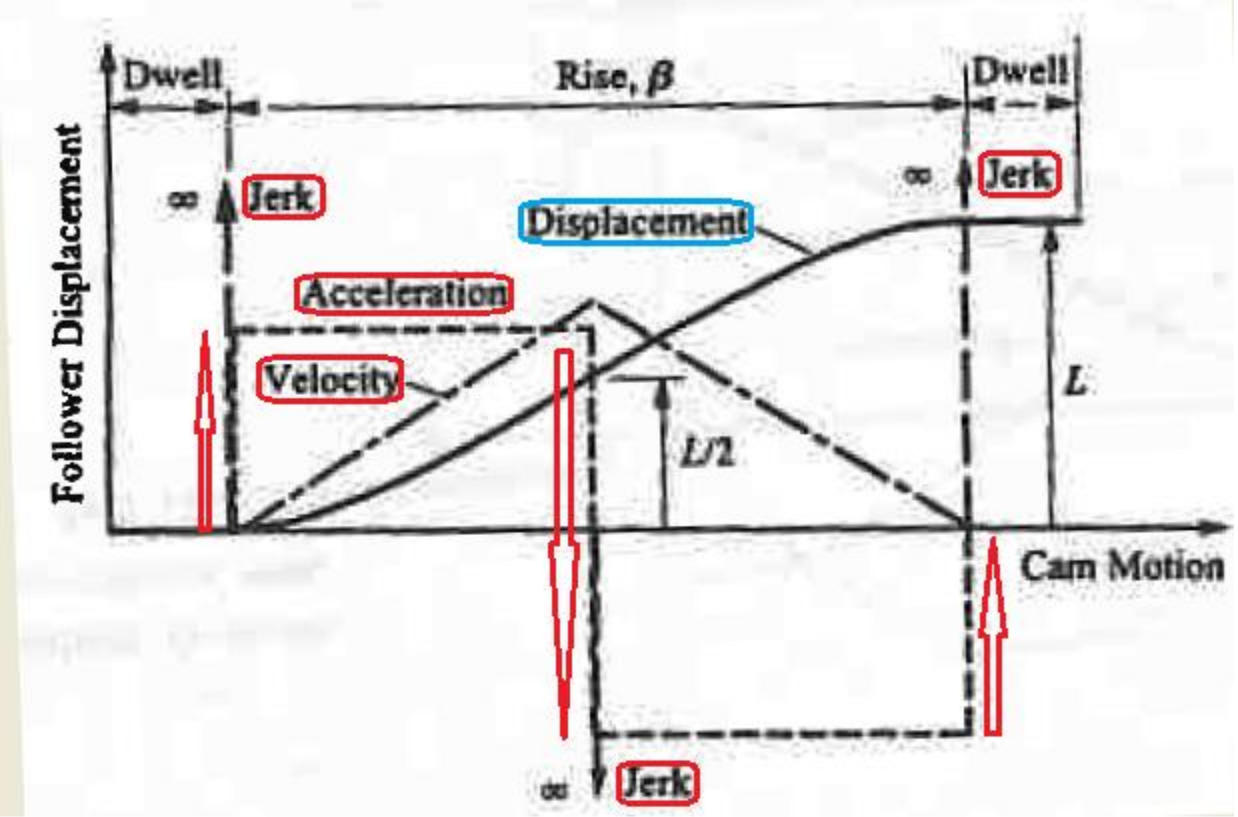
در نهایت

$$y = L\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right] \qquad y' = \frac{4L}{\beta}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right) \qquad \dot{y} = \frac{4L\omega}{\beta}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)$$

$$y'' = -\frac{4L}{\beta^2} \qquad \ddot{y} = -\frac{4L\omega^2}{\beta^2}$$



اگرچه در نقاط اتصال شتاب مقادیر محدودی دارد اما مشتق سوم نسبت به زمان یا اصطلاحا Jerk بینهایت است که نشاندهنده ضربه به سیستم است.



Return

قسمت اول

$y = L$ to 0 angular displacement β

$y = L$ and $y' = 0$ at $\theta = 0$ and $y = L/2$ at $\theta = \beta/2$

$C_0 = L$, $C_1 = 0$, and $C_2 = \frac{-2L}{\beta^2}$

$$y = L\left[1 - 2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$

Return

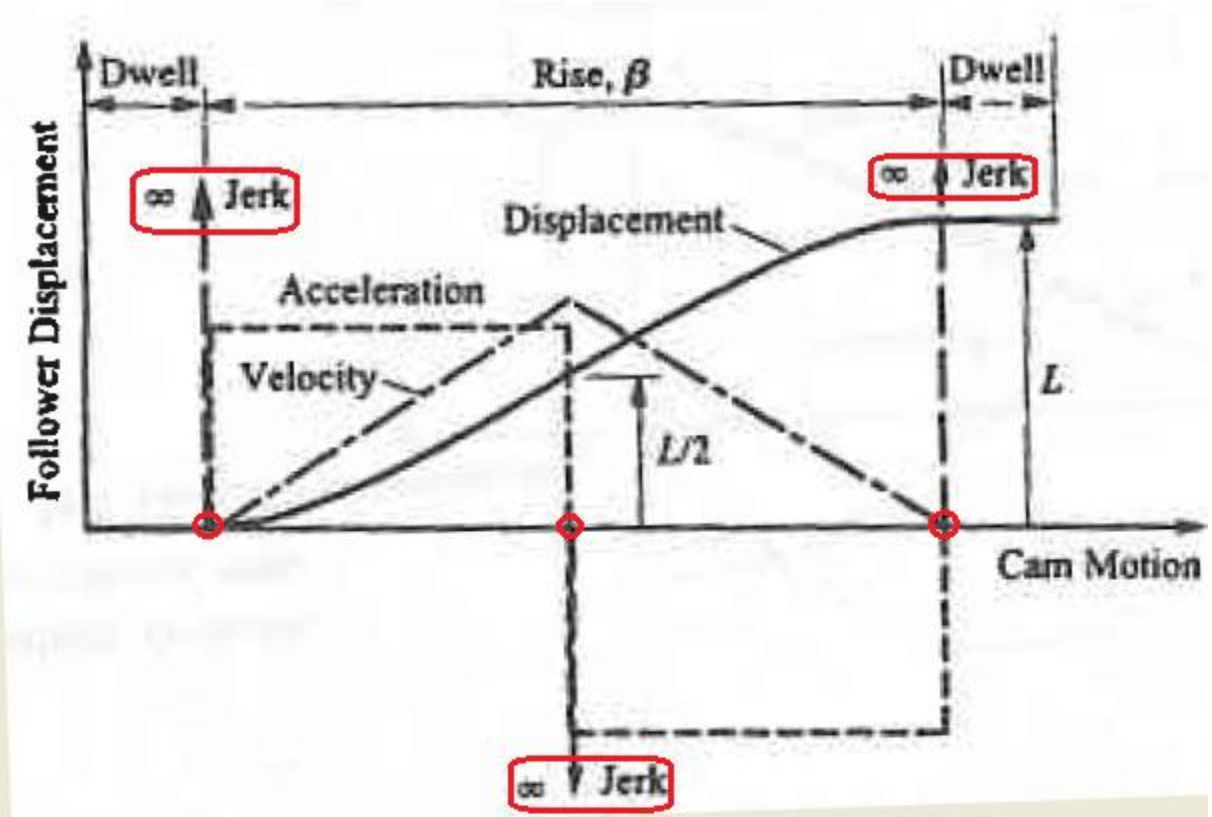
قسمت دوم

$$\theta = \beta/2,\ y = L/2,$$

$$\theta = \beta,\ y = 0,\ \text{and}\ y' = 0$$

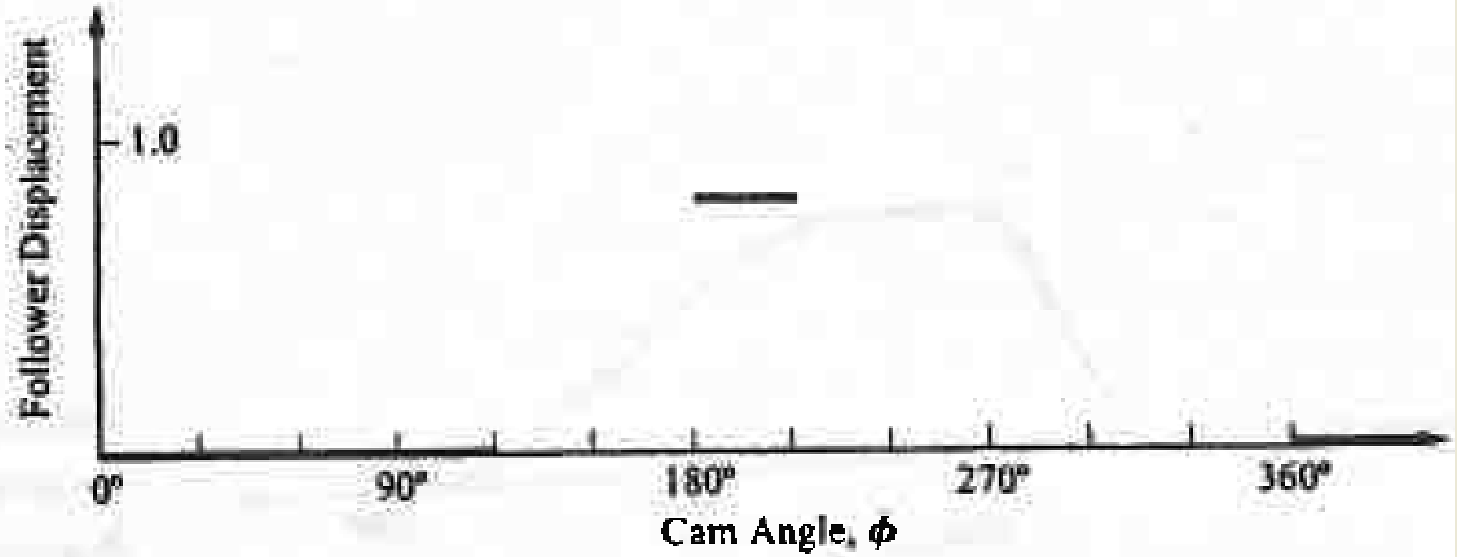
$$y = 2L\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2$$

در نقاط اتصال Jerk بینهایت است



مثال: طراحی بادامک برای حرکت "Parabolic"

dwell at zero lift for the first 120°
dwell at 0.8 in lift for cam angles from 180° to 210°
cam rotates with constant angular velocity
10° plotting intervals



Rise

در زاویه 120° to 180° ده است

در قسمت اول Rise از ۱۲۰ الی ۱۵۰ داریم:

$\beta = 180-120=60°$

$L=0.8$

$$\theta = (\phi - 120^\circ)$$

$$y = 2L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 = 1.6\left(\frac{\phi - 120^\circ}{60^\circ}\right)^2$$

در قسمت دوم Rise از ۱۵۰ الی ۱۸۰ داریم:

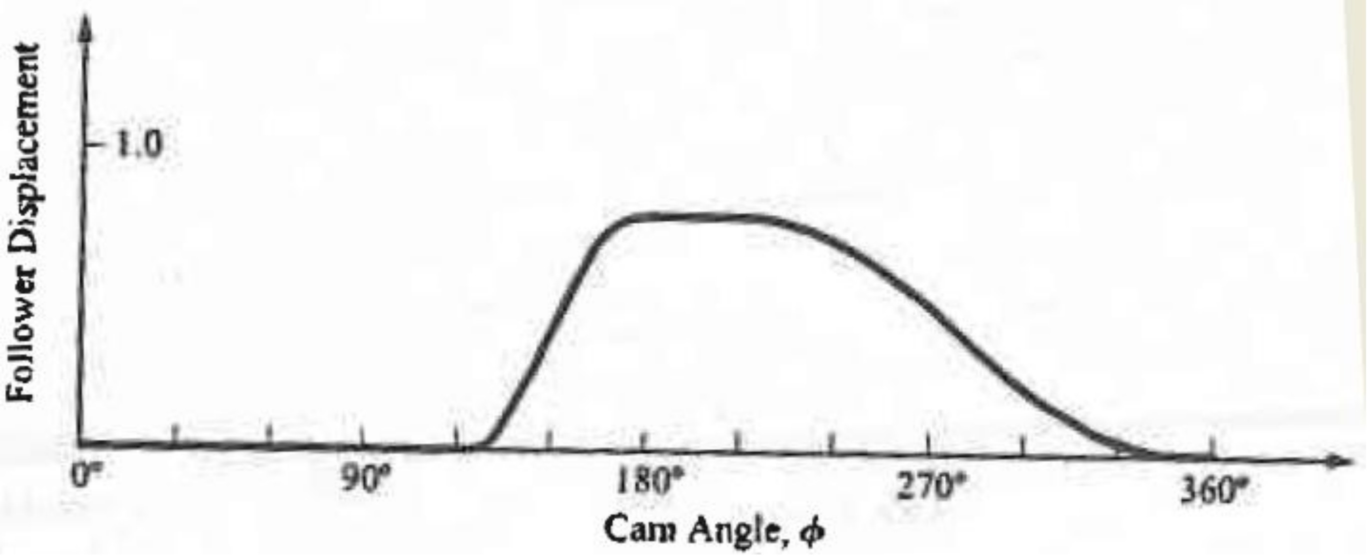
$$\theta = (\phi - 120^\circ)$$

$$y = L\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right] = 0.8\left[1 - 2\left(1 - \frac{(\phi - 120^\circ)}{60^\circ}\right)^2\right]$$

ب

θ	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
y	0.0000	0.0444	0.1778	0.4000	0.6222	0.7556	0.8000

θ	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	0.8000	0.7929	0.7716	0.7360	0.6862	0.6222	0.5440	0.4516
θ	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	0.3484	0.2560	0.1778	0.1138	0.0640	0.0284	0.0071	0.0000



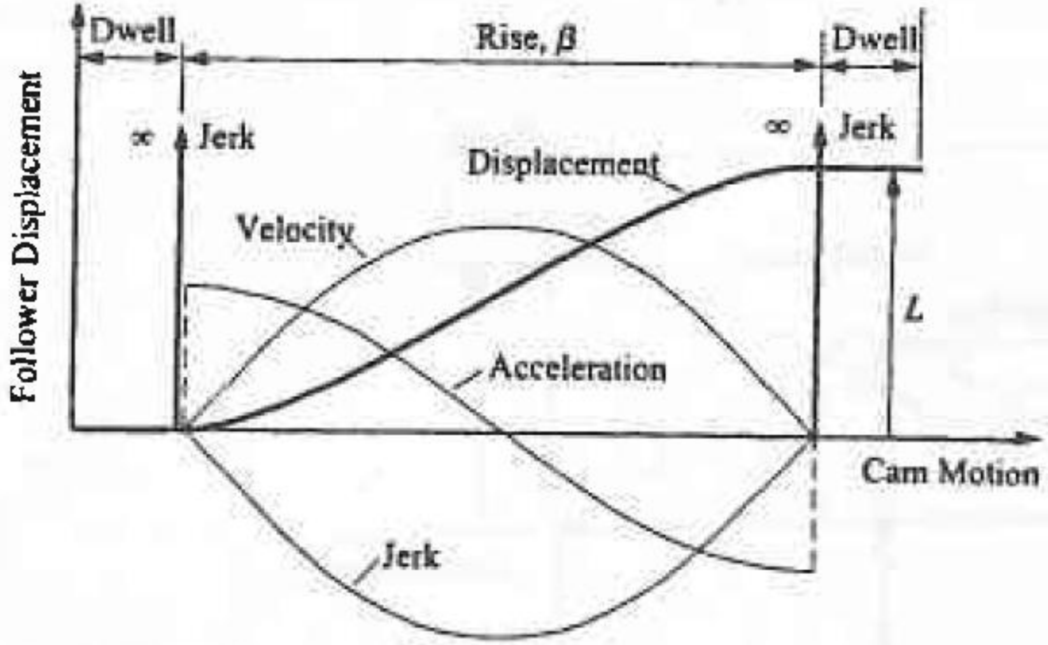
برنامه حرکت هامونیکی در دامنه زمان

حرکت هامونیکی ساده را می توان توسط یک بادامک دایره ای خارج از مرکز و یک دنبال کننده شعاعی بدست آورد.

معادلات حرکت هارمونیکی دارای شکل اصلی زیر است:

$$y = C_0 + C_1 \cos C_2\theta = C_0\left(1 + \frac{C_1}{C_0}\cos C_2\theta\right)$$

دیاگرام تغییرمکان ، سرعت ، شتاب و جرک در شکل زیر نشان داده شده



حرکت هارمونیکی ، منحنی سرعت سینوسی و شتاب کسینوسی ایجاد می کند.

در نقطه اتصال ناپیوستگی وجود ندارد

با یک ضابطه برای زاویه ۰ الی β تعریف می شود

برنامه حرکت هامونیکی

a rise starting from $\theta = 0$ and ending at $\theta = \beta$ and $y = L$

$$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \dot{y} = \frac{\pi L\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$y'' = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$y''' = -\frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \dddot{y} = -\frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

return from $\theta = 0, y = L$ to $\theta = \beta, y = 0$

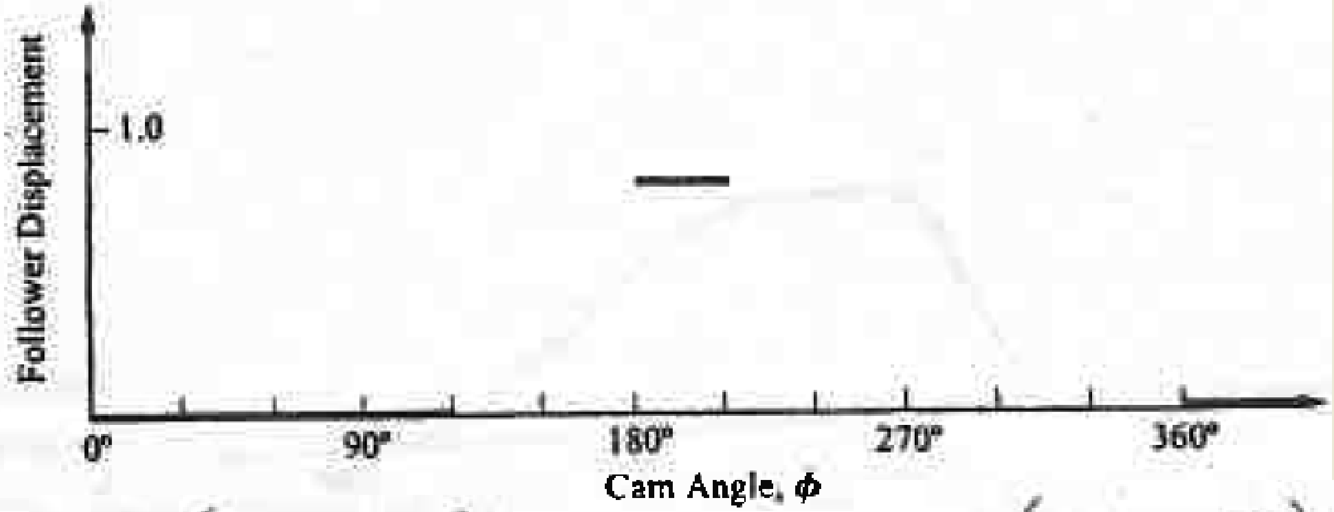
$$y = \frac{L}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \dot{y} = -\frac{\pi L\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$y'' = -\frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = -\frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$y''' = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}, \quad \dddot{y} = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

مثال قبل را برای برنامه حرکت هامونیکی حل نمایید.



$$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$= 0.4\left(1 - \cos\frac{\pi(\phi - 120^\circ)}{60^\circ}\right)$$

$$y = \frac{L}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$= 0.4\left(1 + \cos\frac{\pi(\phi - 210^\circ)}{150^\circ}\right)$$

حل در نرم افزار matlab

برنامه حرکت سیکلوئیدی در دامنه زمان

- حرکت هائیکه تا کنون بررسی شده اند در نقاط شروع و خاتمه دارای شتاب غیر صفر می باشند.
- در این نقاط جرک بینهایت دارند
- در نتیجه محدود به سرعتهای کم می باشند.
- حرکت سیکلوئیدی در نقاط شروع و خاتمه شتاب صفر ایجاد می کند به عبارت دیگر اتصال سیکلوئیدی یک منحنی شتاب سینوسی ایجاد می کند.
- حرکت سیکلوئیدی را می توان توسط غلتاندن یک دایره به شعاع ($L/2\pi$) روی محور عمودی بدست آورد.

معادلات Rise

$$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right), \quad \dot{y} = \frac{L\omega}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

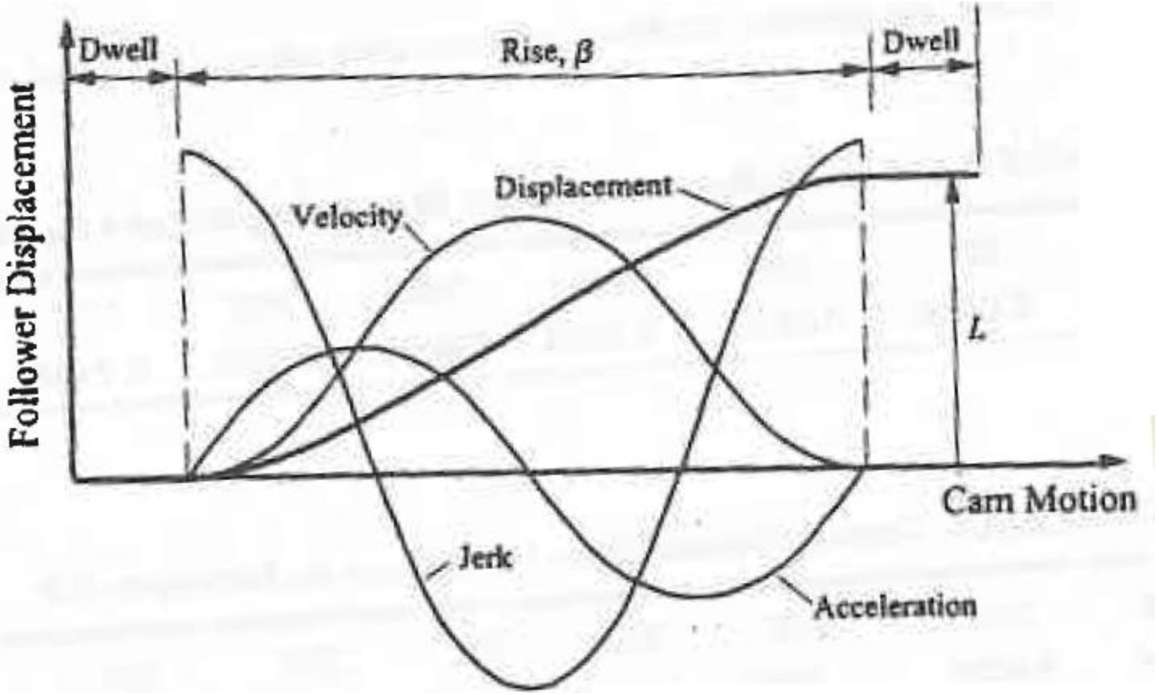
$$y'' = \frac{2L\pi}{\beta^2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = 2L\pi\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$$

$$y''' = \frac{4L\pi^2}{\beta^3}\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}, \quad \dddot{y} = 4L\pi^2\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^3 \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}$$

equations are valid for values of θ from zero to β

معادلات حرکت Return متقارن است بنابراین

return is given by $\bar{y} = L - y$. Therefore, $\bar{y}' = -y'$, $\bar{y}'' = -y''$, and $\bar{y}''' = -y'''$



برنامه حرکت توسط چندجمله ایها

- برای ماشینهای سریع (high speed) متداول است از پروفیل های چند جمله ای استفاده گردد.

- با افزایش درجه چند جمله ای می توان قیودیکه طراح در مد نظر دارد را اعمال کرد.

- در صورتیکه شرایط در دو انتهای Dwell یکسان باشد ، از چند جمله ایهای فرد استفاده می شود.

چند جمله ای درجه ۳ :

دارای تغییرات درجه ۲ سرعت ، تغییرات خطی شتاب و جرک بینهایت در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال است.

چند جمله ای درجه ۵ :

- شتاب و جرک محدود ایجاد می کند
- اما تغییرات جرک در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال بینهایت است.
- اگر از چند جمله ای درجه ۵ استفاده شود اثرات دینامیکی ناشی از خطاهای ساخت اهمیت بیشتری پیدا می کند.

تابع تغییرمکان به صورت زیر تعریف می شود:

$$y = f(\theta) = \sum_{i=0}^{n} A_i \theta^i$$

θ is the cam angle

A's must be determined from the conditions to be matched.

برای تعیین ضرایب فوق n+1 شرط لازم است.

وقتی n بزرگ باشد و زاویه بر حسب درجه بیان شده باشد ، جملات اختلاف زیادی خواهند داشت. خطاهای عددی رسیدن به جواب دقیق را مشکل می سازد.

$$y = f(\theta) = \sum_{i=0}^{n} C_i \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^i$$

constants are always numbers between 0 and 1

شرایط مورد نظر معمولا سرعت و شتاب دنبال کننده می باشند:

$$\dot{y}=\dot{f}(\theta)=\frac{1}{\beta}\frac{d\theta}{dt}\sum_{i=1}^{n} iC_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-1)}$$

$$\ddot{y}=\ddot{f}(\theta)=\frac{1}{\beta}\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum_{i=1}^{n} iC_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-1)}+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-2)}$$

constant-velocity cam

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$$

→

$$y=f(\theta)=\sum_{i=1}^{n} C_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{i}$$

$$\dot{y}=\dot{f}(\theta)=\frac{\omega}{\beta}\sum_{i=1}^{n} iC_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-1)}$$

$$\ddot{y}=\ddot{f}(\theta)=\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-2)}$$

$$\dddot{y}=\dddot{f}(\theta)=\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^3\sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)C_i\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{(i-3)}$$

در نظر بگیرید که در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال باید مکان ، سرعت و شتاب یکسان باشد ، که شش شرط می باشد:

$$\theta = 0 \Rightarrow y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$$

$$\theta = \beta \Rightarrow y = L$$

$$\dot{y} = \ddot{y} = 0$$

معادلات برای شش ثابت باید حل شود

$$y = C_0 + C_1\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5$$

$$\dot{y} = \frac{\omega}{\beta}\left[C_1 + 2C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 3C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right]$$

$$\ddot{y} = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\left[2C_2 + 6C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 12C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 20C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right]$$

بر طبق شرایط در شروع و انتهای Rise داریم:

$$0 = C_0$$

$$L = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

$$0 = \frac{\omega}{\beta} C_1$$

$$0 = \frac{\omega}{\beta}\left[C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5\right]$$

$$0 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 2C_2$$

$$0 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \left[2C_2 + 6C_3 + 12C_4 + 20C_5\right]$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

$$C_3 = 10L, \quad C_4 = -15L, \quad C_5 = 6L$$

$$y = 10L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 15L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 6L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5$$

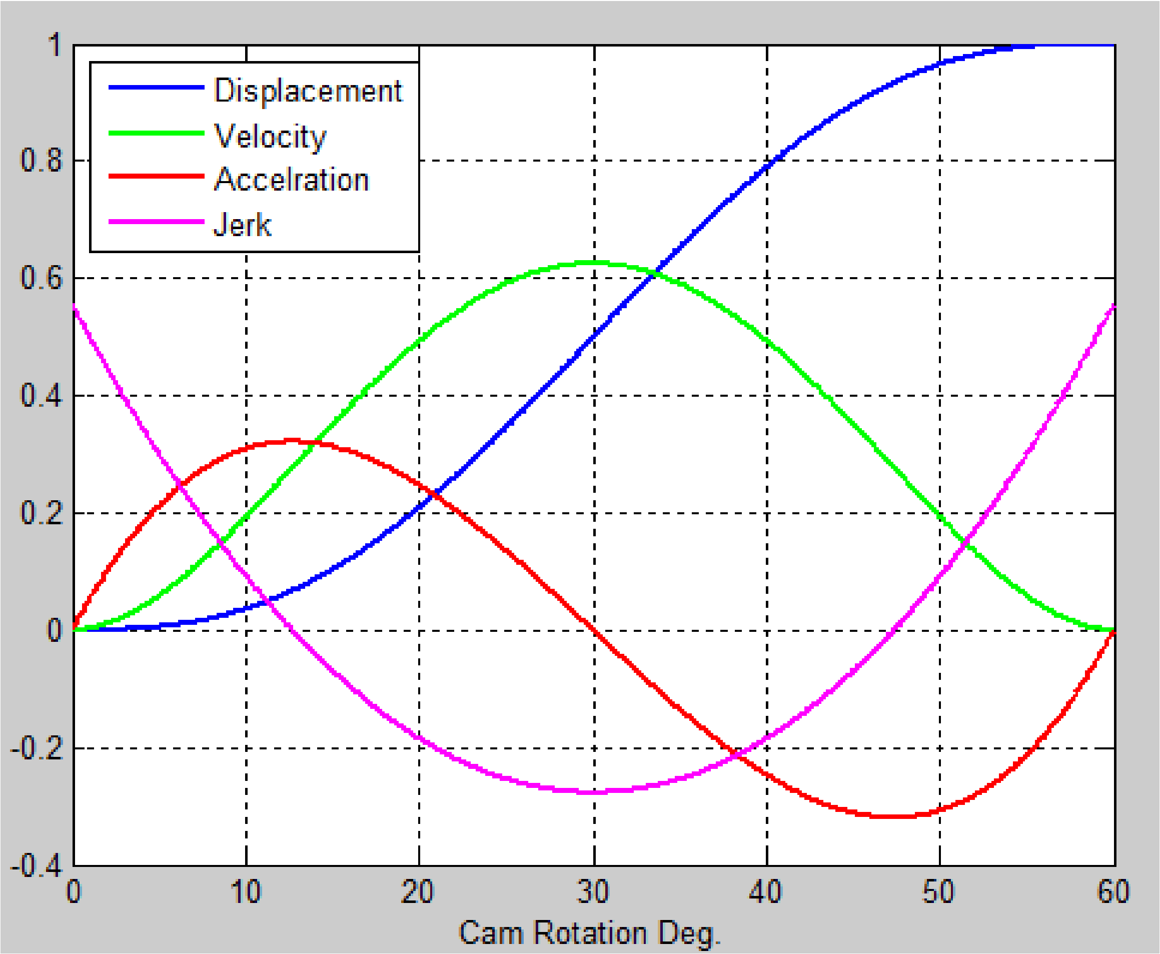
3-4-5 polynomial transition

مشتق گیری

$$y' = \frac{30L}{\beta}\left[\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right], \quad \dot{y} = \frac{30\omega L}{\beta}\left[\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right]$$

$$y'' = \frac{60L}{\beta^2}\left[\left(\frac{\theta}{\beta}\right) - 3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right], \quad \ddot{y} = 60L\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\left[\left(\frac{\theta}{\beta}\right) - 3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right]$$

$$y''' = \frac{60L}{\beta^3}\left[1 - 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right], \quad \dddot{y} = 60L\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^3\left[1 - 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$



حرکت چندجمله ای ۵-۴-۳

برنامه Matlab برای ایجاد حرکت 3-4-5 polynomial

```
clear
teta=sym('teta');
y= '10*L*(teta/beta)^3 –
15*L*(teta/beta)^4 +
6*L*(teta/beta)^5';
yd=diff(y);
ydd=diff(yd);
yddd=diff(ydd);
L=1; % Rise cm
beta = 60; % Rise Angle deg
 ii=1;
for teta=0:0.1:beta
    tteta(ii)=teta;
    yy(ii)=eval(y);
    yyd(ii)=eval(yd);
    yydd(ii)=eval(ydd);
    yyddd(ii)=eval(yddd);
    ii=ii+1;
end
plot(tteta,yy,'LineWidth',2)
hold on
plot(tteta,20*yyd,'g','LineWidth',2)
plot(tteta,200*yydd,'r','LineWidth',2)
plot(tteta,2000*yyddd,'m','LineWidth',2)
grid
legend('Displacement','Velocity','Accelrati
on','Jerk',...
    'Location','NorthWest')
Xlabel('Cam Rotation Deg.')
```

تعیین پروفیل بادامک

پس از تعیین حرکت دنبال کننده بصورت تابعی از حرکت بادامک ، پروفیل بادامک بصورت ترسیمی یا تحلیلی بدست می آید.

پروفیل بادامکهای دقیق و سرعت بالا باید از روش تحلیلی محاسبه شده و با استفاده از ماشینهای CNC تولید شوند.

بادامک ثابت در نظر گرفته شده و مرجع(قاب) به همراه دنبال کننده بسبت به بادامک در جهت عکس حرکت می نمایند.

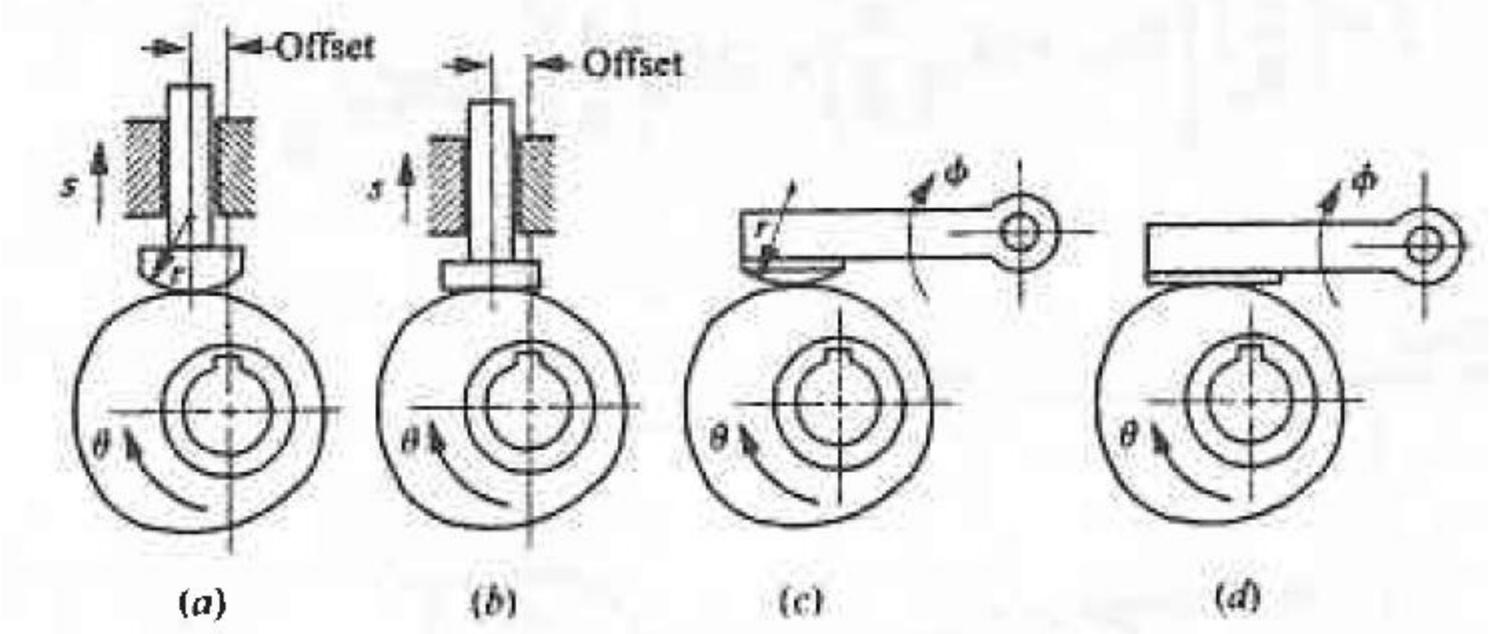
اگر بحث محدود به بادامکهای مسطح دورانی باشد ، چهار نوع دنبال کننده وجود دارد:

a) دنبال کننده انتقالی با سطح استوانه ای

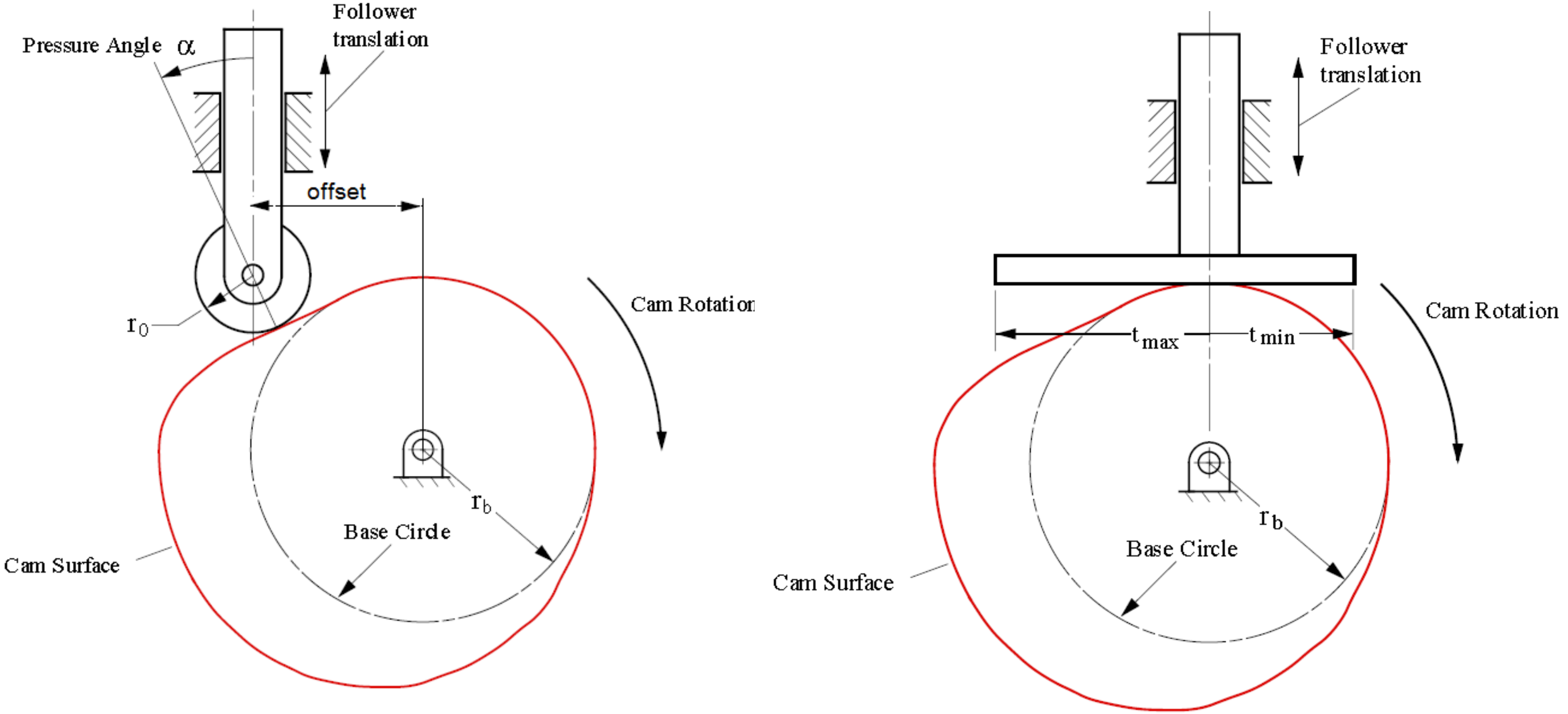
b) دنبال کننده انتقالی با سطح تخت

c) دنبال کننده دورانی با سطح استوانه ای

d) دنبال کننده دورانی با تخت



تعیین پروفیل بادامک برای دنبال کننده غلتشی و مسطح



تعریف چند پارامتر:

- زاویه فشار

زاویه بین جهت حرکت (سرعت) دنبال کننده و راستای خط انتقال حرکت

برای دنبال کننده های انتقالی زاویه فشار کمتر از °۳۰ انتخاب می گردد تا از بارهای جانبی زیاد در اتصال لغزشی جلوگیری شود.

اگر دنبال کننده حول یک مفصل R نوسان می کند، زاویه فشار تا °۳۵ قابل قبول است.

دایره مبنا (base circle)

دایره مبنا کوچکترین دایره ای که مماس بر بادامک رسم گردد.

دایره اولیه (*prime circle*)

کوچکترین دایره ای که مماس بر مکان هندسی مرکز دنبال کننده رسم شود.

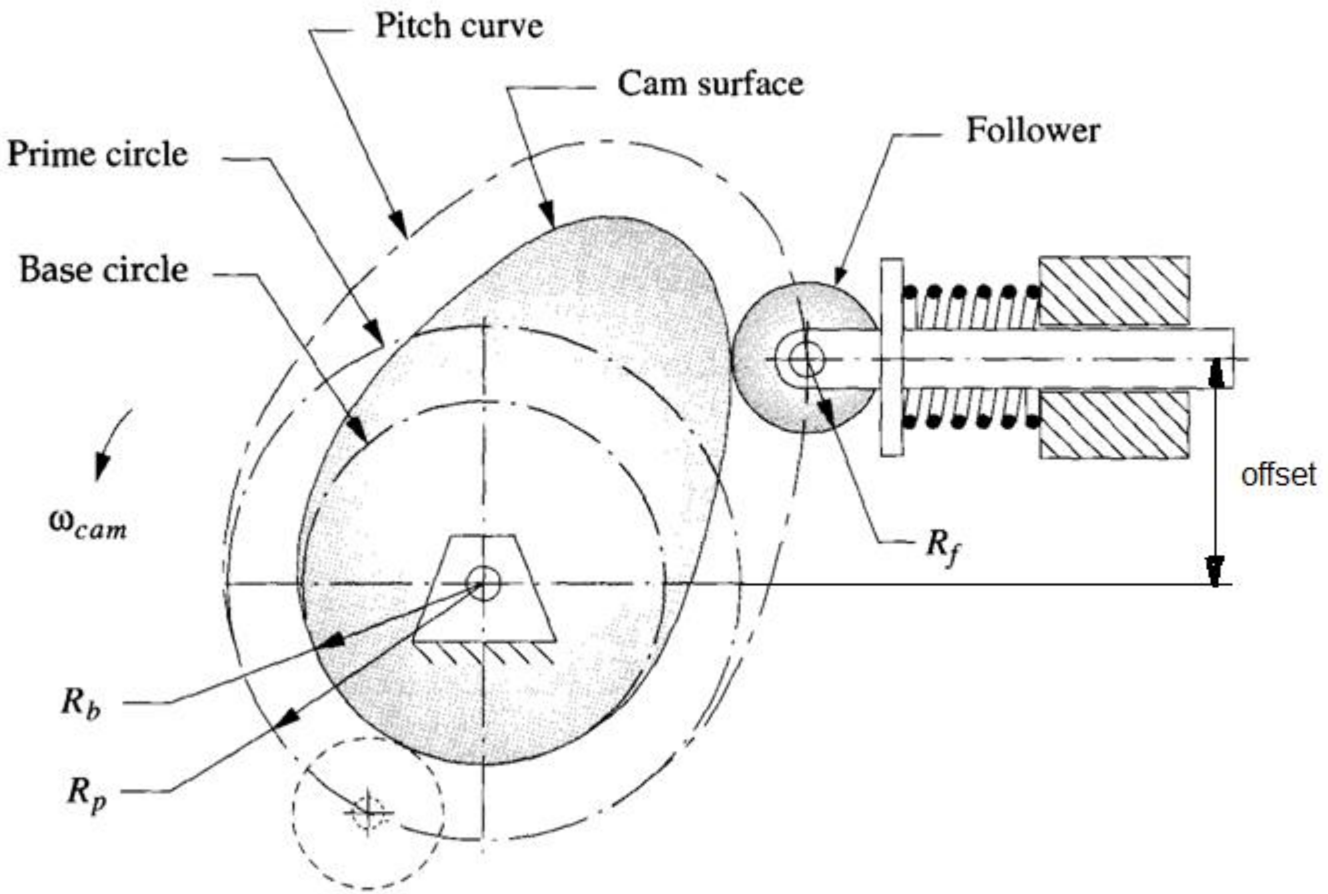
منحنی گام (*pitch curve*)

مکان هندسی مرکز دنبال کننده که در یک سیکل حرکت طی می شود.

خروج از مرکز eccentricity یا offset

فاصله عمودی بین راستای حرکت دنبال کننده و مرکز دوران بادامک

تعاریف فوق را در شکل بررسی کنید.



انتخاب اندازه بادامک

دو عامل اصلی که روی اندازه بادامک موثرند:

(a زاویه فشار pressure angle

(b شعاع انحناء radius of curvature

این دو نیز بستگی به شعاع دایره مبنا در دنبال کننده مسطح و شعاع دایره اولیه در دنبال کننده استوانه ای دارند.

حرکت دنبال کننده بصورت هارمونیک و شرایط

Offset=0

dwell at zero lift for the first 120° of the motion cycle and

dwell at 0.8 lift for cam angles from 180° to 210°

قطر غلتک inch ۱ و بادامک در جهت ساعتگرد دوران می کند.

نتایج محاسبات حرکت دنبال کننده نسبت به زاویه دوران بادامک در جدول زیر آورده شده است.

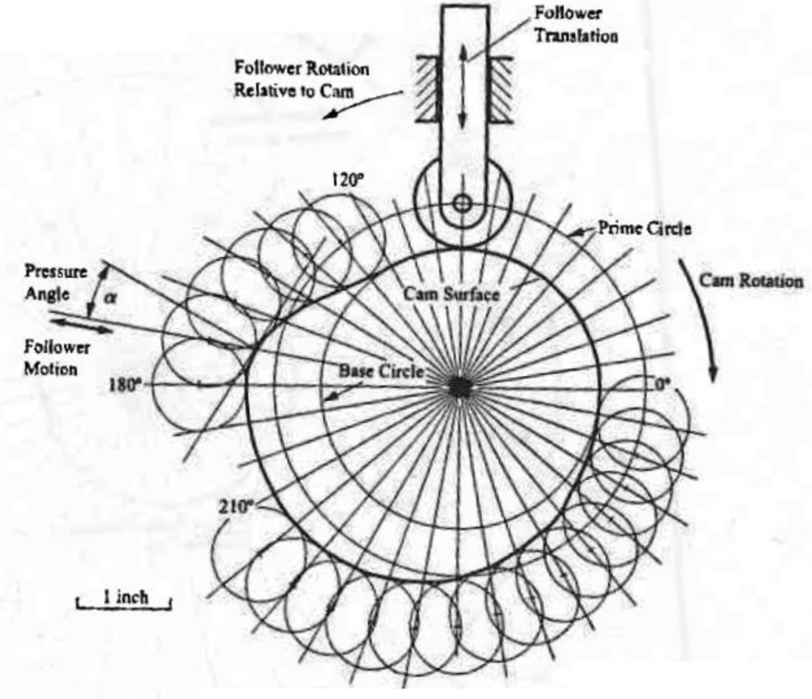
θ	0, 360°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
θ	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0536	0.2000	0.4000	0.6000	0.7464
θ	180°	190°	200°	210°	220°	230°	240°	250°	260°
y	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.7913	0.7654	0.7236	0.6677	0.6000
θ	270°	280°	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°
y	0.5236	0.4418	0.3582	0.2764	0.2000	0.1323	0.0764	0.0346	0.0087

آلگوریتم حل:

۱- ابتدا خطوط شعاعی با نمو 10° در جهت خلاف عقربه های ساعت رسم می شود.

۲- سپس دایره مبنا و دایره اولیه رسم می شوند.

شعاع دایره مبنا انتخابی است(inch ۱.۵) و شعاع دایره اولیه از رابطه زیر بدست می آید.



$$radius\ of\ \ prime\ circle = r_b + r_o$$
$$= 1.5 + 0.5 = 2\ inch$$

- موقعیتهای متوالی مرکز دنبال کننده بصورت شعاعی به سمت خارج دایره مبنا خواهد بود.

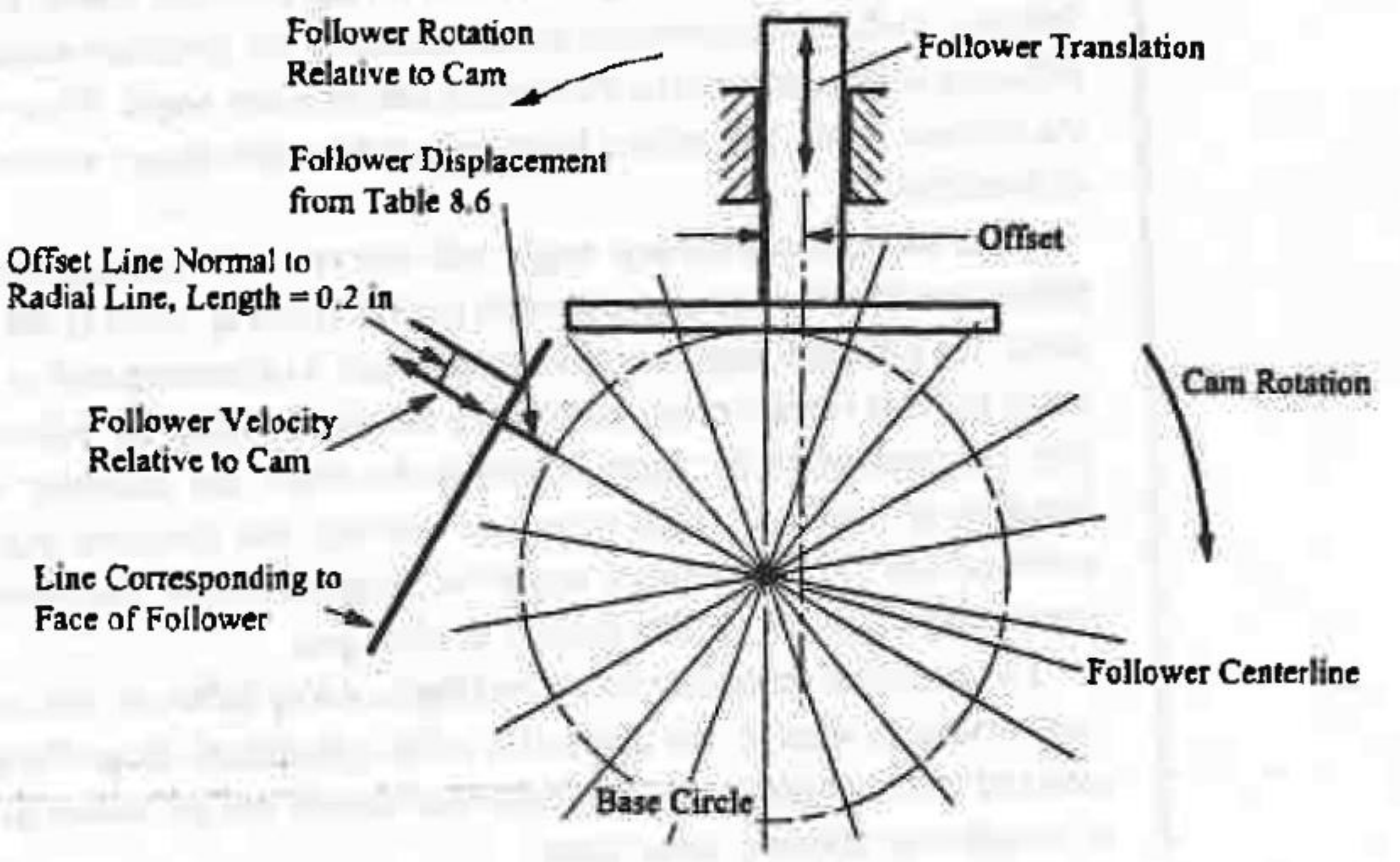
- در صورتیکه شعاع دایره مبنا کوچکتر از حد مجاز باشد موقعیتهایی پیش خواهد آمد که شعاع پروفیل بادامک کوچکتر از شعاع دنبال کننده شود که باید از آن اجتناب کرد.

- دایره های رسم شده به مرکز این نقاط و شعاع دنبال کننده رسم شده ، پوش یا منحنی مماس به این دایره ها پروفیل بادامک مورد نظر خواهد بود.

رسم پروفیل بادامک برای Radial Flat-faced Follower

- پروفیل تغییر مکان هارمونیکی و جدول تغییر مکان مطابق مثال قبلی می باشد.
- در این حالت دایره اولیه وجود ندارد ، اما روی انتخاب شعاع دایره مبنا باید دقت نمود
- خطوط شعاعی با نمو مورد نظر مطابق قبل رسم می شوند
- تغییر مکانها بر اساس اعداد داده شده در جدول در امتداد شعاعی در نظر گرفته شده
- خط عمود در این نقاط بر راستای شعاعی ، سطح بادامک را معین می سازد
- محور دنبال کننده **offset** راستای شعاعی به اندازه داده شده است.

مراحل فوق را در شکل زیر بررسی نمایید



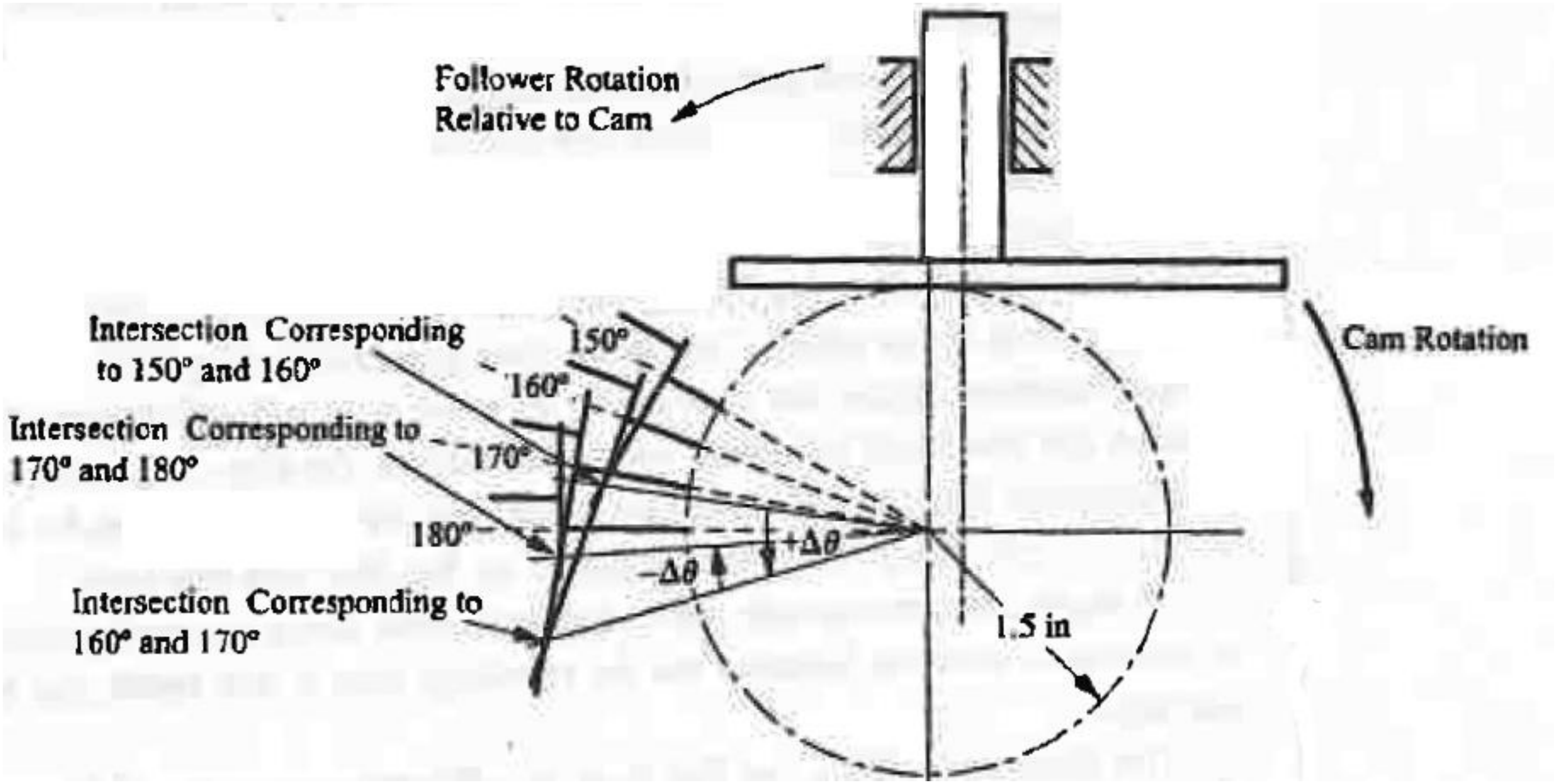
قید اصلی روی پروفیل بادامک برای دنبال کننده تخت این است که باید محدب باشد (Convex).

در غیر این صورت تماس در قسمتهایی از پروفیل بادامک قطع خواهد شد.

تحدب (Convexity) از روی جهت شعاع انحناء و یا از روی تغییر زاویه خط مماس قابل تشخیص است.

بادامک رسم شده در شکل قبل شرط تحدب را نقض می کند.

نقض شرط تحدب را بررسی نمایید



base circle is too small to generate an acceptable cam for
a flat-faced follower

فصل ۸ طراحی بادامک ها

خطوط سطح دنبال کننده تخت رسم شده و نقطه تلاقی خطوط متوالی مشخص می شود.

جهت بدست آوردن سطح محدب باید نمو زاویه ای در نقاط تلاقی متوالی مثبت باشد.

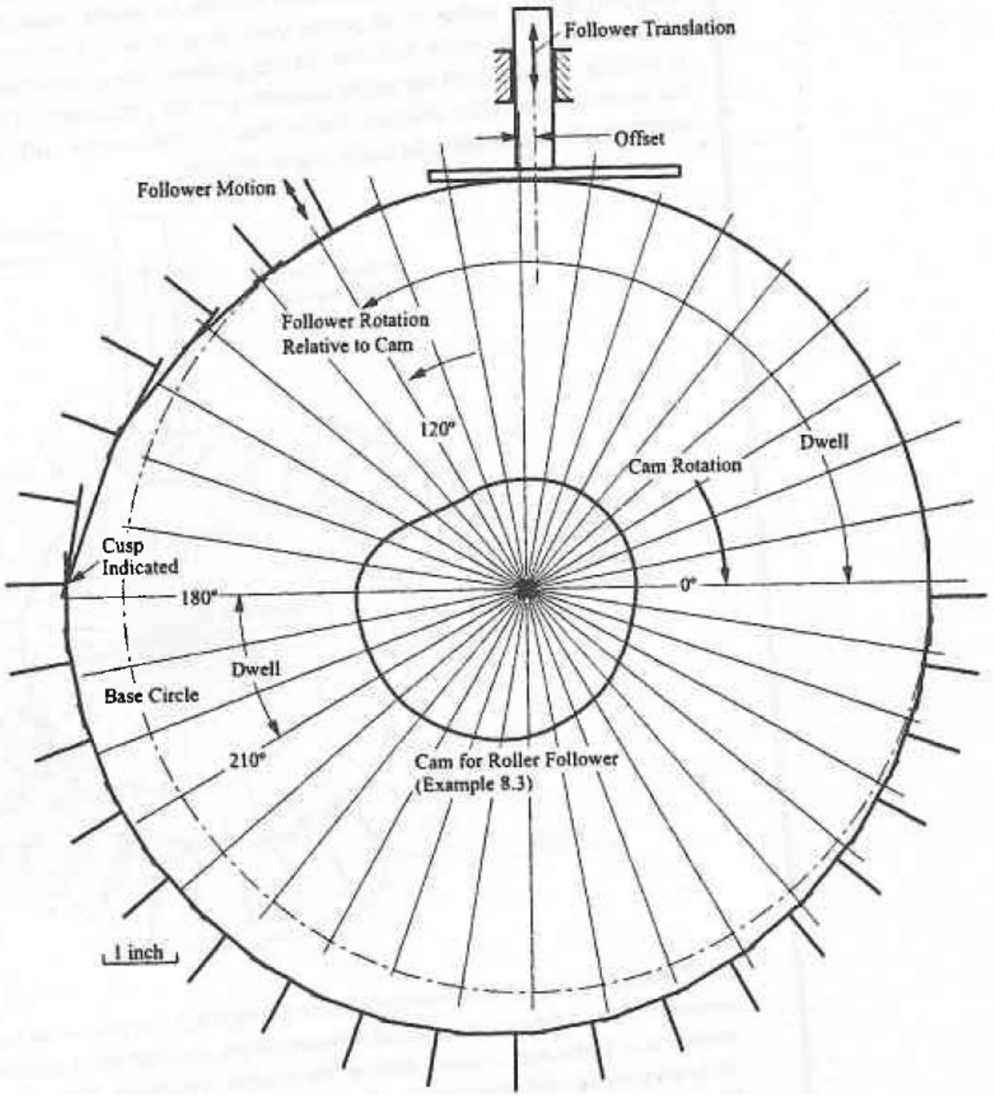
اگر نمو منفی باشد باید شعاع دایره مبنا بزرگتر انتخاب شود.

برای بررسی این مشکل موقعیتهاب متوالی **150, 160, 170, 180** را در نظر بگیرید.

ابتدا شعاع دایره مبنا **1.5 inch** انتخاب شده است.

نمو زاویه ای در تقاطع **160, 170** مثبت و در **170, 180** منفی می باشد.

لذا شعاع دایره مبنا باید بزرگتر انتخاب شود.



نمو زاویه ای بین 170,180 گلوگاه است

اگر این نمو صفر در نظر گرفته شود شعاع

دایره مبنا حدودا 5.5 inch بدست می آید.

برای این دایره مبنا ، پروفیل بادامک یک

نقطه تیز cusp در نقطه تلاقی دو خط

170,180 درجه دارد.

در شکل پروفیلهای بادامک برای دنبال

کننده های غلتکی و تخت مقایسه شده اند.

ابعاد بادامک برای دنبال کننده تخت بزرگتر است ، نقطه cusp دارد و ابعاد سطح صاف دنبال کننده نیز باید بزرگتر باشد.

از طرف دیگر زاویه فشار در دنبال کننده مسطح همیشه صفر است.

اما نیروی جانبی روی یاتاقانها وجود دارد.

- اصطکاک
- گشتاور به علت offset

تعیین تحلیلی پروفیل بادامک

- در کاربردهای high speed دقت بالاتری برای پروفیل بادامک مورد نیاز است و باید از روشهای تحلیلی استفاده کرد.

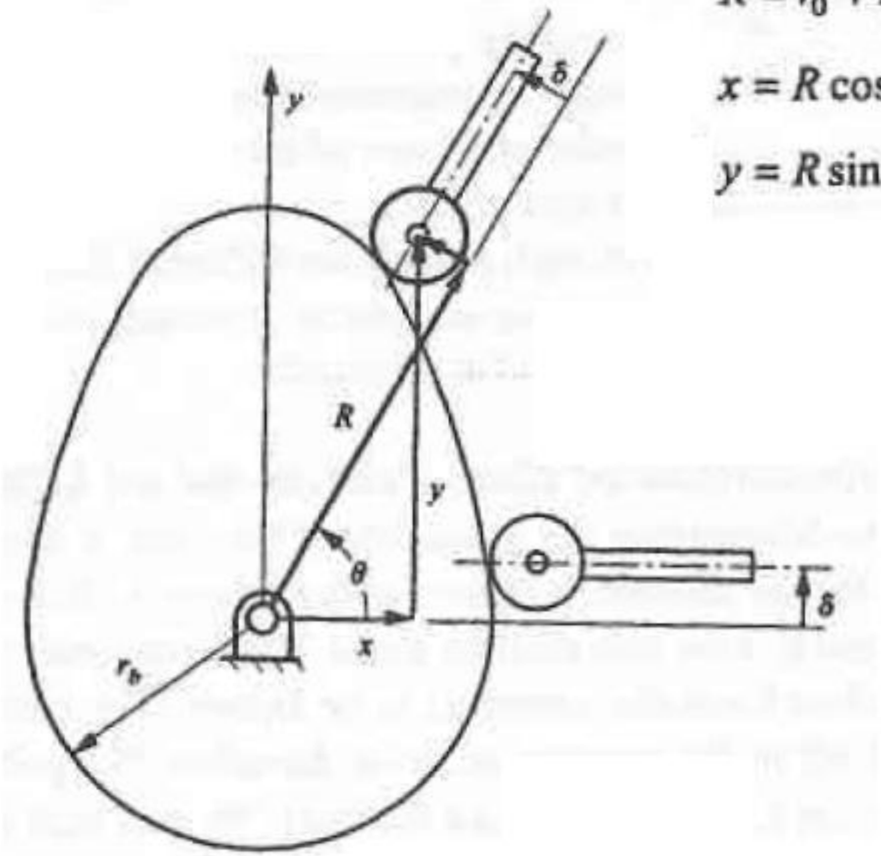
- یک دستگاه مختصات ثابت در روی بادامک و یک دستگاه متحرک در روی دنبال کننده در نظر گرفته می شود.

- برای بدست آوردن موقعیتهای دنبال کننده نسبت به بادامک کافی است که موقعیت دستگاه متحرک نسبت به ثابت محاسبه گردد.

پروفیل بادامک برای offset radial roller follower

- قبل از شروع حل فرض می شود که روابط حرکت دنبال کننده $y=f(\theta)$ ، شعاع دایره مبنا ؛ شعاع غلتک و مقدار offset داده شده اند.

- ابتدا مکانهای متوالی مرکز غلتک تعیین شده سپس منحنی پوش (envelope) بدست می آید.



$$R = r_0 + r_b + f(\theta)$$

$$x = R\cos\theta - \delta\sin\theta = \left[r_0 + r_b + f(\theta)\right]\cos\theta - \delta\sin\theta$$

$$y = R\sin\theta + \delta\cos\theta = \left[r_0 + r_b + f(\theta)\right]\sin\theta - \delta\cos\theta$$

اگر شعاع غلتک صفر باشد و یا اگر از فرز انگشتی به اندازه قطر غلتک استفاده شود ، مختصات x, y فوق قابل استفاده خواهد بود.

در غیر این صورت ، منحنی مورد نظر پوش یک سری دایره خواهد بود.

- تئوری پوش خیلی پیچیده است و بهتر است که از روشهای عددی استفاده شود.
- در روش عددی اگر نمو زاویه ای به اندازه کافی کوچک باشد ، دقت قابل قبولی بدست خواهد آمد.
- برخی از روشهای عددی عبارتند از:

1. intersections of roller circles
2. average tangent location formed by successive tangent lines
3. intersections of successive tangent lines, and
4. tangent points formed by a circle tangent to three successive positions of the roller .

شعاع انحناء بادامک به چند دلیل مهم است:

- اگر در ناحیه ای بادامک مقعر باشد ، شعاع انحناء حداقل قطرابزار را مشخص می کند.
- اگر در ناحیه ای بادامک مقعر باشد ، شعاع انحناء حداقل قطررولر دنبال کننده را مشخص می کند.
-
- تنشهای تماسی تابعی از شعاع انحناء بادامک می باشند.

اگر رابطه پارامتری برای $x(\theta)$ و $y(\theta)$ و جود داشته باشد ، می توان شعاع انحناء ρ را از رابطه زیر محاسبه نمود

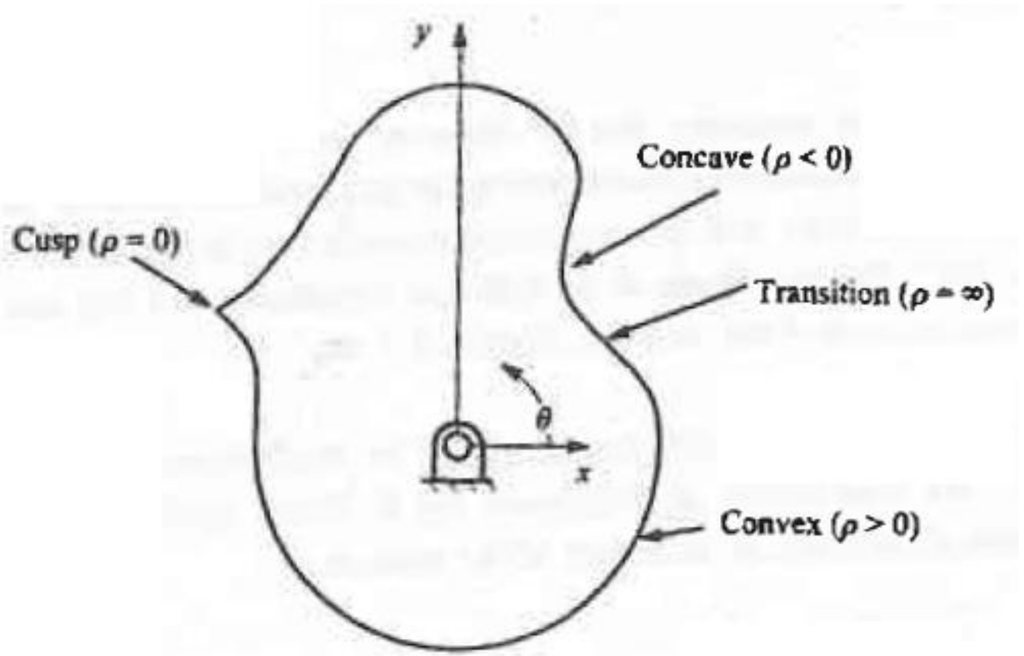
$$\rho = \frac{\sqrt{\left[\left(dx/d\theta\right)^2 + \left(dy/d\theta\right)^2\right]^3}}{\left(dx/d\theta\right)\left(d^2y/d\theta^2\right) - \left(dy/d\theta\right)\left(d^2x/d\theta^2\right)}$$

توجه نمایید که شعاع انحناء دارای اندازه و جهت است. وقتی پروفیل محدب باشد شعاع انحناء مثبت و در صورتی که پروفیا مقعر باشد شعاع انحناء منفی است.

• شعاع می تواند صفر باشد ، که نشاندهنده نقطه cusp می باشد.

• انتقال بین نواحی محدب و مقعر باعث ایجاد شعاع انحناء بینهایت یا نقطه عطف می شود.

• تعابیر هندسی مقادیر مختلف ρ در شکل نشان داده شده است.



تعیین مرکز انحناء پروفیل بادامک در نقطع دلخواه

- برای زاویه θ داده شده مرکز انحناء پروفیل بادامک همان مرکز انحناء منحنی گام می باشد که با مراکز متوالی رولر دنبال کننده تعیین می شود.
- مرکز انحناء منحنی گام با برازش دایره ای به سه نقطه متوالی مرکز رولر بدست می آید.

$$p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$$
$$p_{i} = (x_{i}, y_{i})$$
$$p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$$

- *موقعیت تقریبی مرکز انحناء*

$$p_c = (x_c, y_c)$$

دستگاه معادلات خطی برای بدست آوردن موقعیت p_C

$$\begin{bmatrix} 2(x_{i+1}-x_i) & 2(y_{i+1}-y_i) \\ 2(x_{i-1}-x_i) & 2(y_{i-1}-y_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x_{i+1}^2-x_i^2)+(y_{i+1}^2-y_i^2) \\ (x_{i-1}^2-x_i^2)+(y_{i-1}^2-y_i^2) \end{Bmatrix}$$

مقدار شعاع انحناء

$$\rho = \left| \mathbf{r}_{p_i/p_c} \right| = \sqrt{(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2}$$

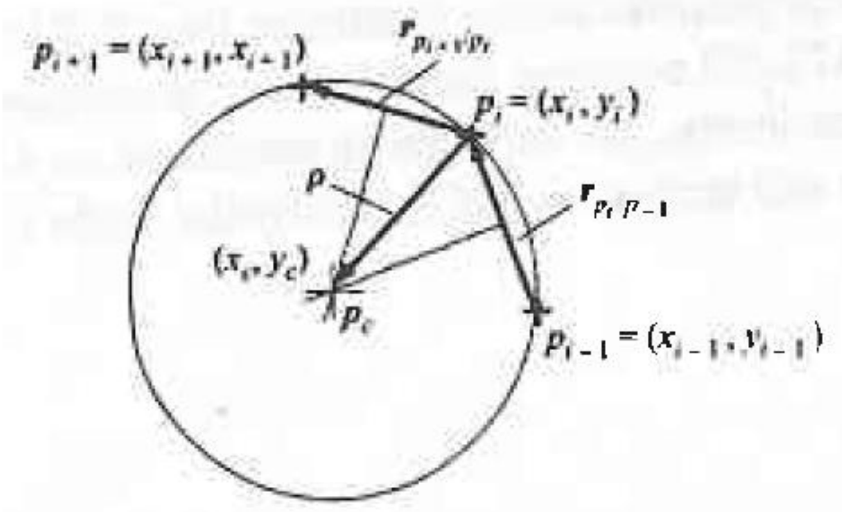
جهت یا علامت شعاع انحناء

$$\mathbf{r}_{p_i/p_{i-1}} \times \mathbf{r}_{p_{i+1}/p_i} = \left[(x_i-x_{i-1})(y_{i+1}-y_i)-(x_{i+1}-x_i)(y_i-y_{i-1}) \right] \mathbf{k}$$

علامت شعاع انحناء با استفاده از ضرب خارجی بدست می آید:

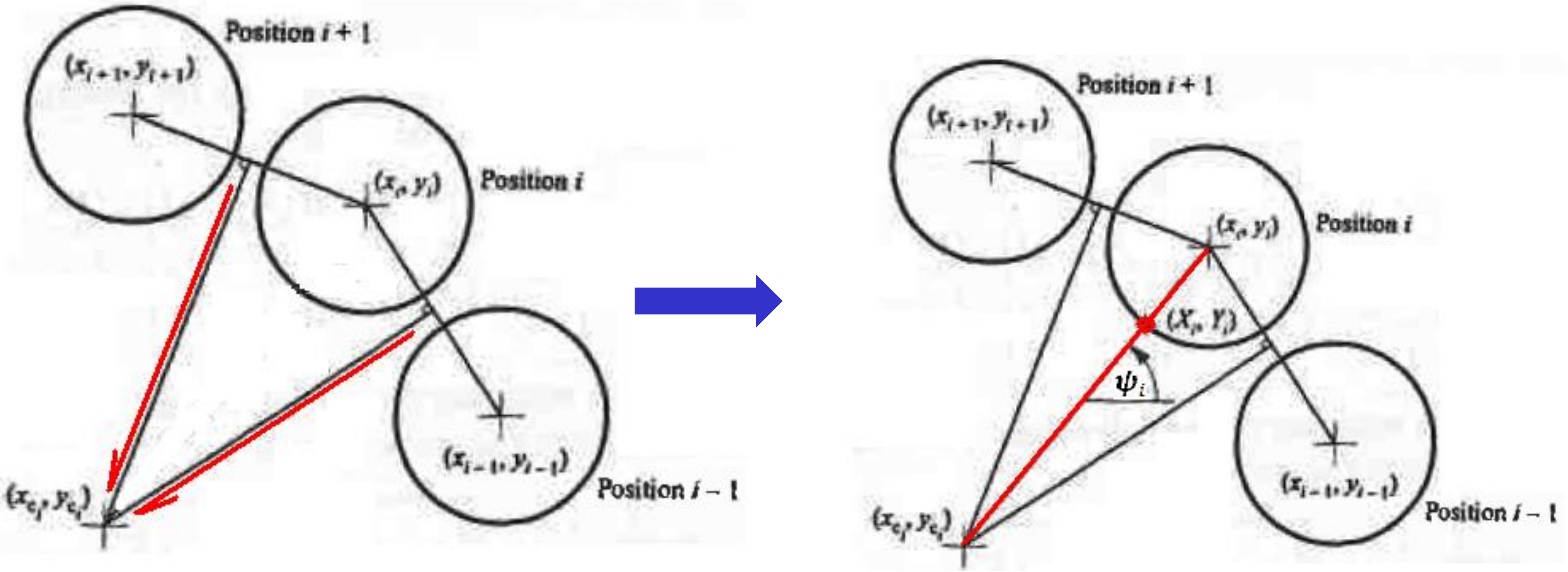
- اگر حاصلضرب در راستای مثبت **k** باشد ، علامت مثبت و پروفیل محدب است.
- اگر حاصلضرب در راستای منفی **k** باشد ، علامت منفی و پروفیل مقعر است.
- اگر دترمینان ضرایب صفر باشد ، مرکز انحناء در بینهایت و شعاع انحناء بینهایت و پروفیل نقطه عطف دارد.
- اگر $p_i = (x_i, y_i) = p_c = (x_c, y_c)$ ، شعاع انحناء صفر و نقطه تیز وجود دارد.

$$\mathbf{r}_{p_i/p_{i-1}} \times \mathbf{r}_{p_{i+1}/p_i} = \left[(x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - y_i) - (x_{i+1} - x_i)(y_i - y_{i-1})\right]\mathbf{k}$$



تقریب پروفیل با استفاده ار مرکز انحناء

- سه نقطه متوالی مراکز غلتک رسم می شود.
- مرکز انحناء برخورد خطوط عمود بر پاره خطهای متوالی در نقطه میانی می باشند.
- نقطه روی پروفیل بادامک در روی خط گذرنده از مرکز انحنا و مرکز رولر قرار دارد.
- (X_i, Y_i) محل برخورد این خط با دایره غلتک است.



شیب خط گذرنده از مرکز انحناء و مرکز غلتک دوم

$$\psi_i = \tan^{-1}\left(\frac{y_i - y_c}{x_i - x_c}\right)$$

مختصات نقطه روی بادامک برای وقتی که پروفیل محدب است:

$$X_i = x_i - r_0 \cos\psi_i$$
$$Y_i = y_i - r_0 \sin\psi_i$$

مختصات نقطه روی بادامک برای وقتی که پروفیل مقعر است:

$$X_i = x_i + r_0 \cos\psi_i$$
$$Y_i = y_i + r_0 \sin\psi_i$$

محاسبه زاویه فشار

زاویه بین عمود بر پروفیل بادامک و راستای حرکت دنبال کننده

- روش اول: $\phi_i = \psi_i - \theta$

- روش دوم: مختصات مرکز انحناء نسبت به دستگاه ثابت محاسبه شود. در صورتی که فرض شود دنبال کننده افقی حرکت می کند ، شیب خط متصل کننده مرکز انحناء و مرکز غلتک زاویه فشار را معین می سازد.

خلاصه روابط محاسبات

Radius of curvature

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(X_{i+1}-X_i) & 2(Y_{i+1}-Y_i) \\ 2(X_{i-1}-X_i) & 2(Y_{i-1}-Y_i) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} (X_{i+1}^2-X_i^2)+(Y_{i+1}^2-Y_i^2) \\ (X_{i-1}^2-X_i^2)+(Y_{i-1}^2-Y_i^2) \end{Bmatrix}$$

$$\rho = \frac{[(X_i-X_{i-1})(Y_{i+1}-Y_i)-(X_{i+1}-X_i)(Y_i-Y_{i-1})]}{|(X_i-X_{i-1})(Y_{i+1}-Y_i)-(X_{i+1}-X_i)(Y_i-Y_{i-1})|}\sqrt{(X_i-x_c)^2+(Y_i-y_c)^2}$$

Cam coordinates

$$x_i = [r_0 + r_b + f(\theta_i)]\cos\theta_i - \delta\sin\theta_i$$

$$y_i = [r_0 + r_b + f(\theta_i)]\sin\theta_i + \delta\cos\theta_i$$

$$\psi_i = \tan^{-1}\left(\frac{y_i - y_c}{x_i - x_c}\right) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$X_i = x_i - r_0\cos\psi_i, \quad Y_i = y_i - r_0\sin\psi_i \quad \text{(convex)}$$

$$X_i = x_i + r_0\cos\psi_i, \quad Y_i = y_i + r_0\sin\psi_i \quad \text{(concave)}$$

Pressure angle

$$\phi_i = \psi_i - \theta$$

مثال: پروفیل بادامک با مشخصات زیر را تعیین نمایید ،

the follower starts from a dwell 0 to 90° and rotate CW.

The rise occurs with cycloidal motion for rotation from 90° to 180°. The follower then dwells for 60° of cam rotation, and

the return by harmonic motion for the cam rotation from 240° to 360°.

Rise is 2 cm, and the follower radius is 1 cm.

he base circle radius is 4 cm and the offset is 0.5 cm.

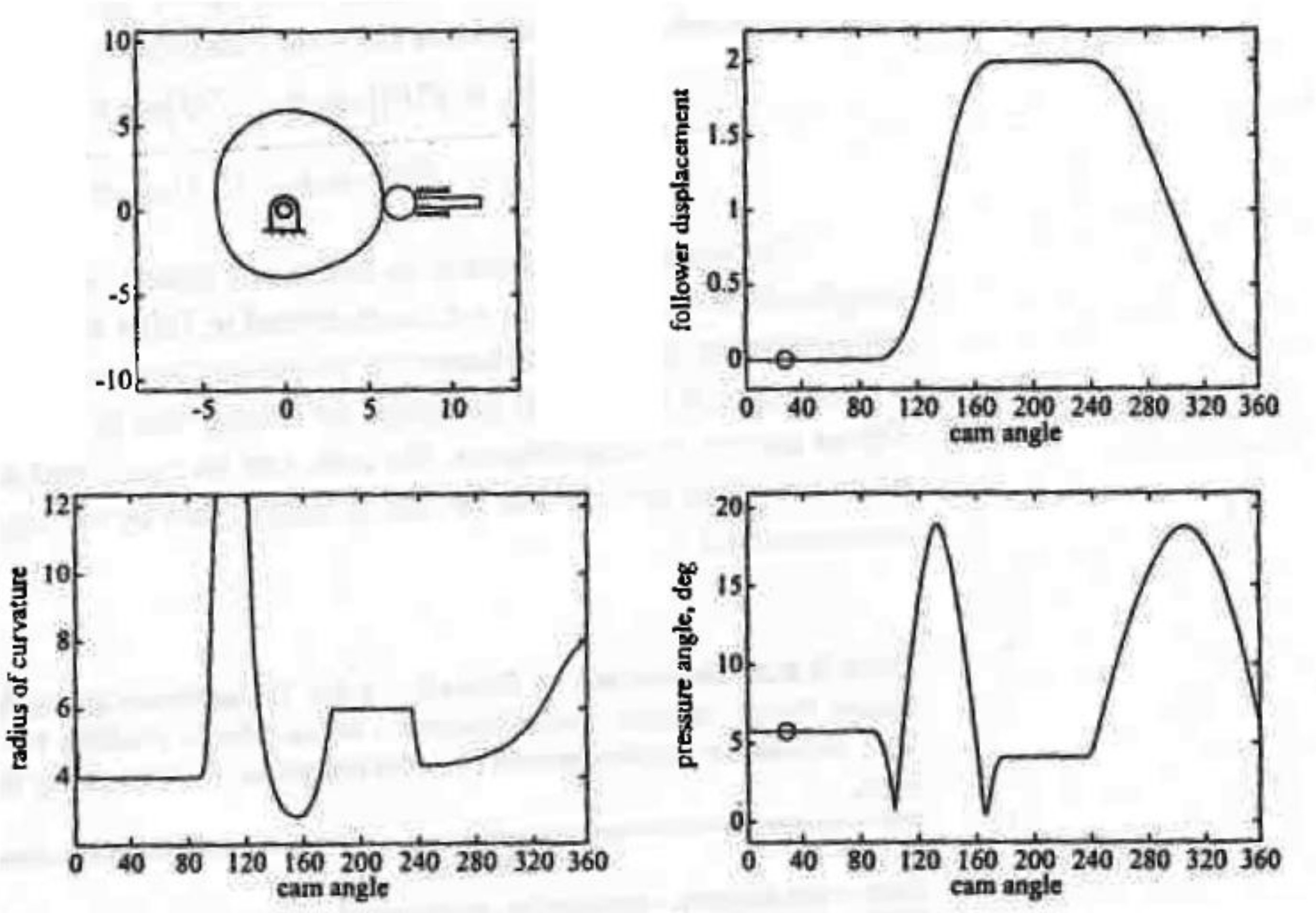
$$0 \le \theta \le \pi/2: \qquad y = 0$$

$$\pi/2 \le \theta \le \pi: \qquad f(\theta) = \frac{2L}{\pi}\left(\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 4\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\pi \le \theta \le 4\pi/3: \qquad f(\theta) = 2, \quad f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

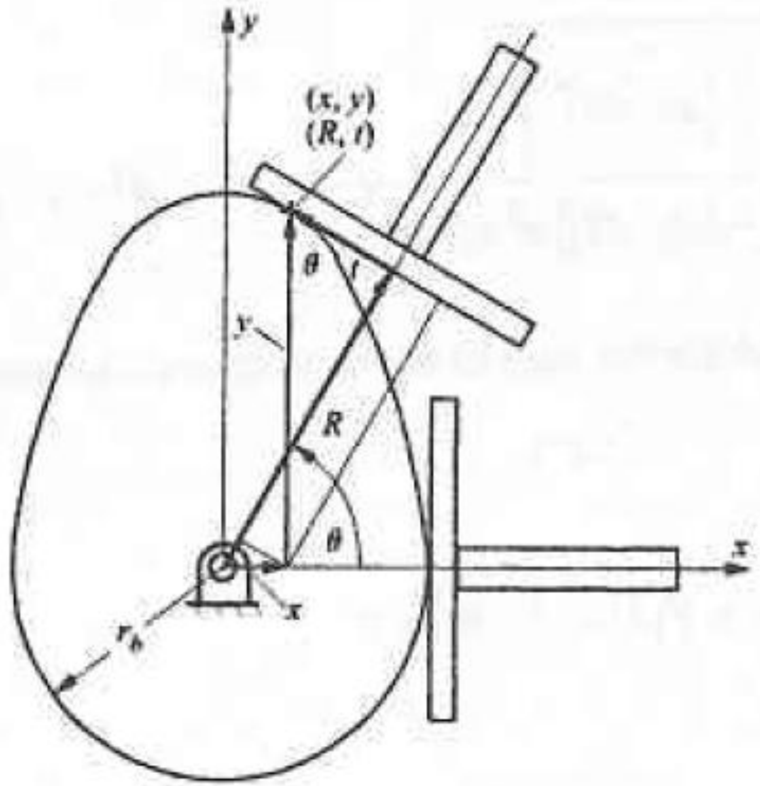
$$4\pi/3 \le \theta \le 2\pi: \qquad f(\theta) = \frac{L}{2}\left(1 + \cos\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

حل توسط نرم افزار Matlab



تعیین تحلیلی پروفیل بادامک برای دنبال کننده تخت شعاعی

تغییر مکان شعاعی دنبال کننده



$$R = r_b + f(\theta)$$

$$R = y\sin\theta + x\cos\theta$$

$$t = y\cos\theta - x\sin\theta = \frac{dR}{d\theta} = f'(\theta)$$

$$x = R\cos\theta - t\sin\theta$$

$$y = R\sin\theta + t\cos\theta$$

$$x = \left[r_b + f(\theta)\right]\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta$$

$$y = \left[r_b + f(\theta)\right]\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta$$

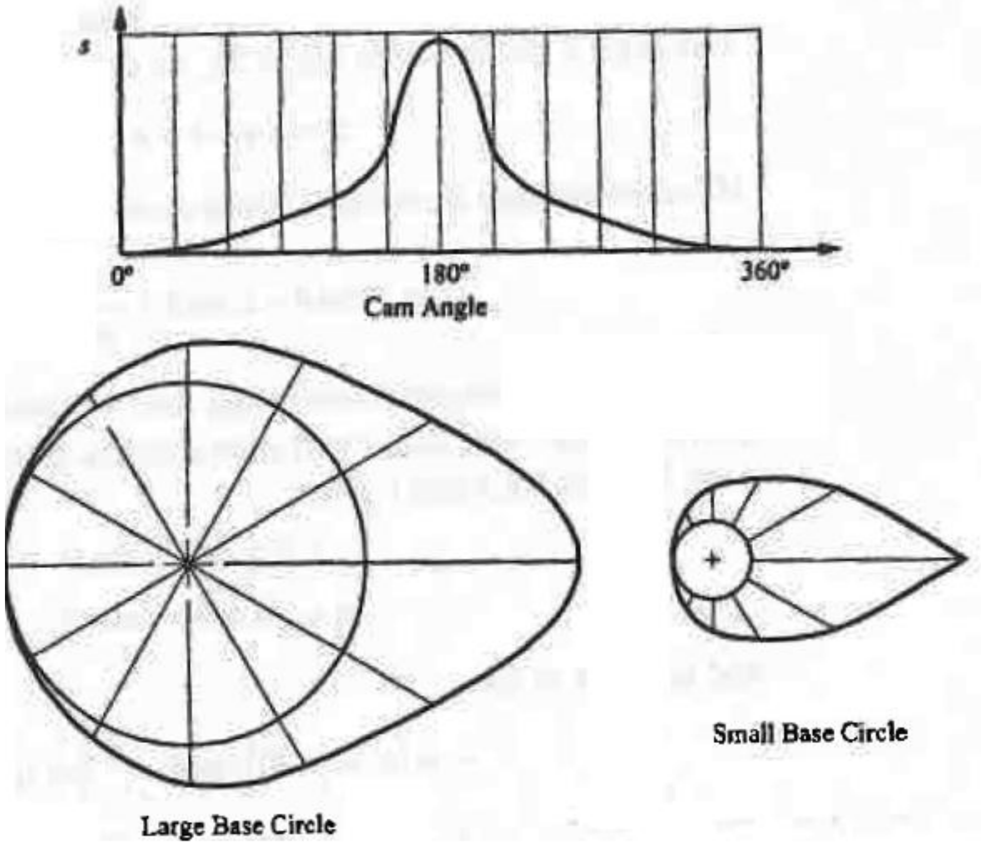
حداقل شعاع دایره مبنا برای دنبال کننده تخت ، شعاعی که از cusp جلوگیری نماید.

برای برنامه حرکت داده شده با کاهش

شعاع دایره مبنا ، شیب پروفیل بادامک

تندتر می شود. و نهایتا به نقطه تیز

منتهی می شود



محاسبه حداقل شعاع دایره مبنا

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = f'(\theta)\cos\theta - \left[r_b + f(\theta)\right]\sin\theta - f''(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta = -\left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right]\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -\left[f'(\theta) + f'''(\theta)\right]\sin\theta - \left[r_b + f'(\theta) + f'''(\theta)\right]\cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = f'(\theta)\sin\theta + \left[r_b + f(\theta)\right]\cos\theta + f''(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta = \left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right]\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = \left[f'(\theta) + f'''(\theta)\right]\cos\theta - \left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right]\sin\theta$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2\right]^3}}{(dx/d\theta)(d^2y/d\theta^2) - (dy/d\theta)(d^2x/d\theta^2)} = \left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right]$$

شرط محدب بودن و عدم وجود cusp

$$\rho \geq 0$$

$$\left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r_b \geq -f(\theta) - f''(\theta)$$

Cam coordinates—clockwise rotation of cam

$$x_i = \left[r_b + f(\theta_i)\right]\cos\theta_i - f'(\theta_i)\sin\theta_i$$

$$y_i = \left[r_b + f(\theta_i)\right]\sin\theta + f'(\theta_i)\cos\theta_i$$

Cam coordinates—counterclockwise rotation of cam

$$x = \left[r_b + f(\theta)\right]\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta$$

$$y = \left[r_b + f(\theta)\right]\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta$$

Minimum face length

$$t_{max,min} = f'(\theta_i)\Big|_{max,min}$$

Radius of curvature

$$\rho = \left[r_b + f(\theta) + f''(\theta)\right]$$

- مثال:
  - براساس برنامه حرکت مثال قبل ، پروفیل بادامک را برای دنبال کننده تخت شعاعی محاسبه نمایید. حداقل شعاع دایره مبنا را بدست آورید.

$$0 \le \theta \le \pi/2: \; f(\theta) = f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

$$\pi/2 \le \theta \le \pi: \; f(\theta) = \frac{2L}{\pi}\left(\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 4\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right), \; f'(\theta) = \frac{2L}{\pi}\left(1 - \cos 4\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$f''(\theta) = \frac{8L}{\pi}\left(\sin 4\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\pi \le \theta \le 4\pi/3: \; f(\theta) = 2, \; f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

$$4\pi/3 \le \theta \le 2\pi: \; f(\theta) = \frac{L}{2}\left(1 + \cos\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right), \; f'(\theta) = -\frac{3L}{4}\sin\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$f''(\theta) = -\frac{9L}{8}\cos\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$$

θ	f(θ) (cm)	f′(θ) (cm)	f″(θ) (cm)	r_{bmin} (cm)	t (cm)
0°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
			—dwell—		
90°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100°	0.018	0.298	3.274	−3.291	0.298
110°	0.131	1.052	5.016	−5.147	1.052
120°	0.391	1.910	4.411	−4.802	1.910
130°	0.780	2.470	1.742	−2.522	2.470
140°	1.220	2.470	−1.742	0.522	2.470
150°	1.609	1.910	−4.411	2.802	1.910
160°	1.869	1.052	−5.016	3.147	1.052
170°	1.982	0.298	−3.274	1.291	0.298
180°	2.000	0.000	0.000	−2.000	0.000
			—dwell—		
240°	2.000	−0.000	−2.250	0.250	−0.000
250°	1.966	−0.388	−2.173	0.207	−0.388
260°	1.866	−0.750	−1.949	0.083	−0.750
270°	1.707	−1.061	−1.591	−0.116	−1.061
280°	1.500	−1.299	−1.125	−0.375	−1.299
290°	1.259	−1.449	−0.582	−0.676	−1.449
300°	1.000	−1.500	0.000	−1.000	−1.500
310°	0.741	−1.449	0.582	−1.324	−1.449
320°	0.500	−1.299	1.125	−1.625	−1.299
330°	0.293	−1.061	1.591	−1.884	−1.061
340°	0.134	−0.750	1.949	−2.083	−0.750
350°	0.034	−0.388	2.173	−2.207	−0.388

براساس محاسبات انجام شده

حداقل شعاع دایره مبنا

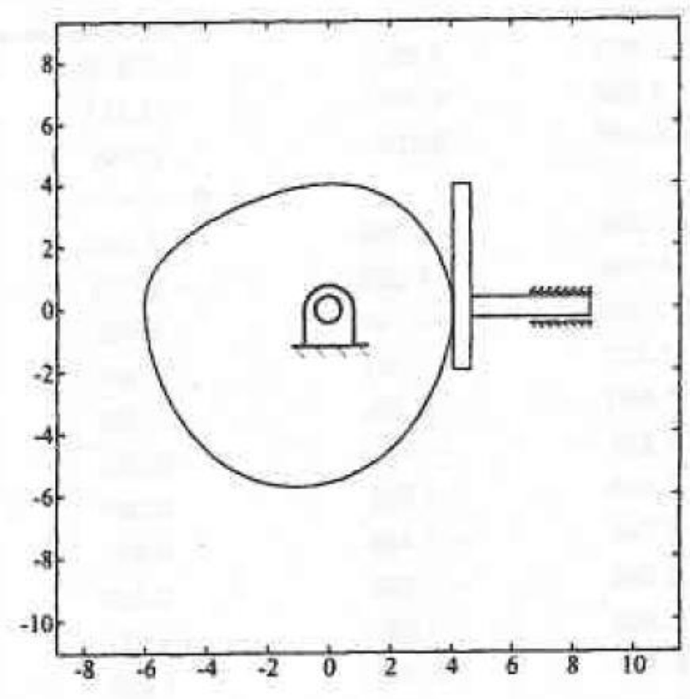
$r_b = 3.147$ cm

وحداقل t 2.47cm بالای

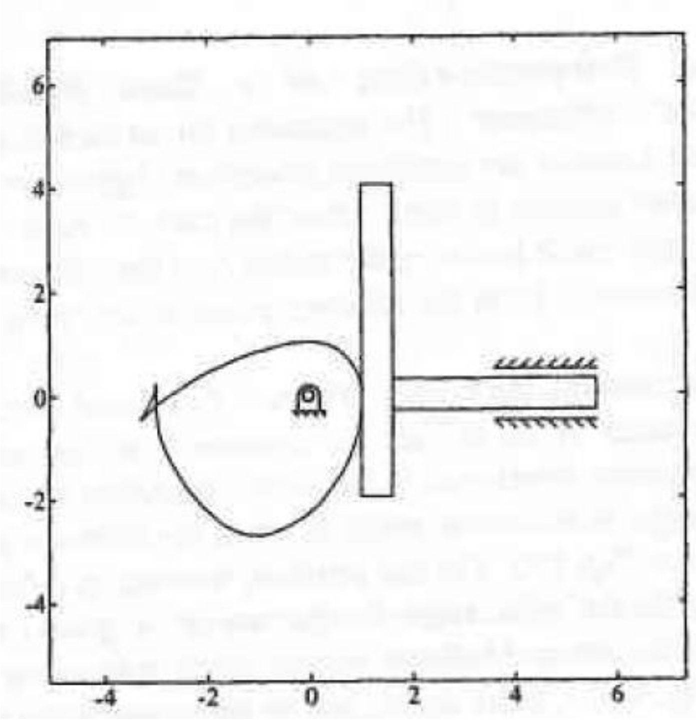
خط مرکز و 1.5cm پایین

خط مرکز باید باشد تا تماس

در روی سطح تخت واقع شود.



cam with a base circle radius 3.2 cm, and the follower face will be 2.6 cm above centerline and 1.6 cm below it

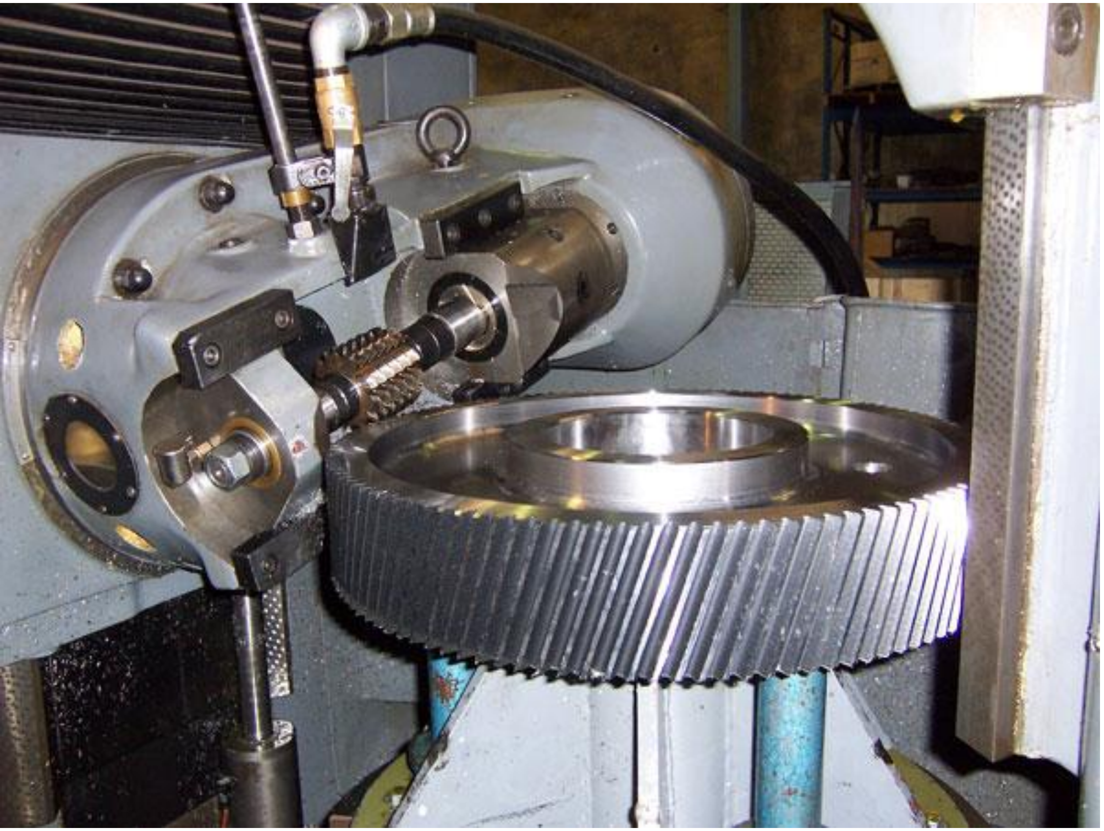


cam with a base circle radius ۱ cm

پایان فصل ۸

فصل ۹

چرخدنده و مجموعه چرخدنده ها



مکانیزم هایی که در فصلهای قبلی مورد بررسی قرار گرفته اند ، به عنوان: Non-uniform motion or force transformer

شناخته می شوند. در حالاتی که انتقال حرکت یکنواخت (نسبت سرعت ثابت) لازم باشد از چرخدنده ، تسمه یا زنجیر استفاده می شود.

در این مکانیزه ها اگر محور ورودی با سرعت زاویه ای ثابت دوران نماید ، محور خروجی نیز با سرعت ثابت دوران می کند. اگرچه در عمل ممکن است اندکی نوسان در خروجی وجود داشته باشد.

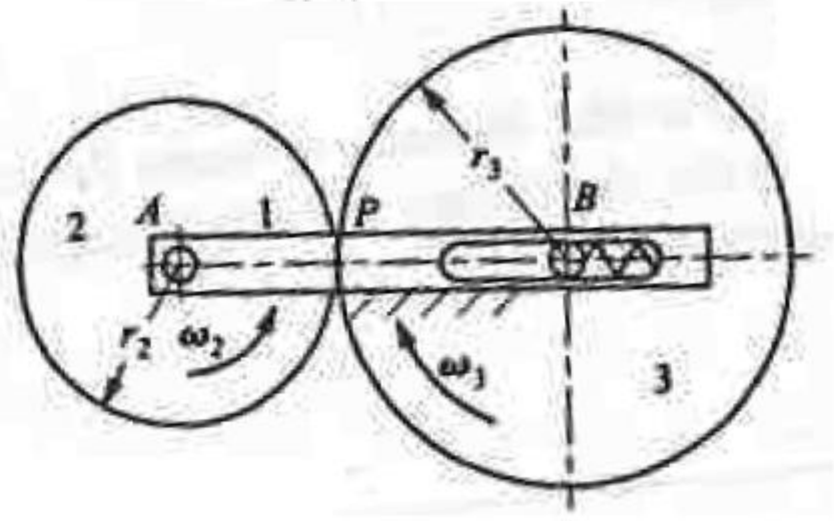
علت این نواسانات از نحوه عملکرد سیستم یا از نواقص ساخت است.

- انتقال قدرت کم توسط مکانیزمهای اصطکاکی صورت می گیرد.
- اگر حرکت بدون لغزش باشد:
- دو دیسک در خلاف جهت هم دوران می کنند.
- مزایا: سروصدا کم ، هزینه کم و نرم بودن حرکت
- معایب: توان کم ، حساس بودن به ذرات

$$v_{P_2} = v_{P_3}$$

$$\omega_2 \times r_{P/A} = \omega_3 \times r_{P/B}$$

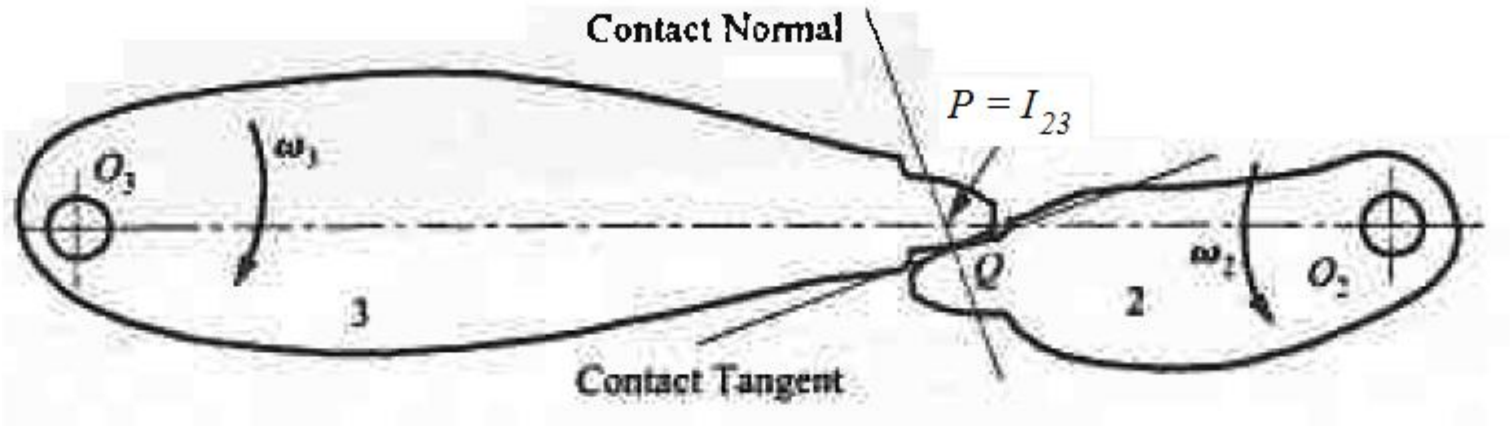
$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$$



- چرخدنده مستقیم (Spur Gears)
  - برای انتقال قدرت از یک محور به محور دیگر استفاده می شود
  - لزوم نسبت سرعت ثابت
    - محور خروجی بطور پیوسته حرکت شتابدار افزایشی کاهشی خواهد داشت.
    - تنشهای سیکلی ، ارتعاشات ، سروصدا ، تلف شدن توان و ....
  - پروفیل تماس دندانه هایی که نسبت سرعت ثابت ایجاد می کنند ، conjugate یا مزدوج نامیده می شود.
  - اگر پروفیل یک دندانه داده شده باشد می توان پروفیل دندانه مقابل را با استفاده از روشهای ترسیمی یا تحلیلی بست آورد.

- در عمل تعداد کمی پروفیل مورد استفاده قرار می گیرند.
  - ساده ترین نوع چرخدنده ، چرخدنده مستقیم است
    - محورهای خروجی موازیند
    - پروفیل دندانه ها involute
    - انواع دیگر چرخدنده

- شرط نسبت سرعت ثابت



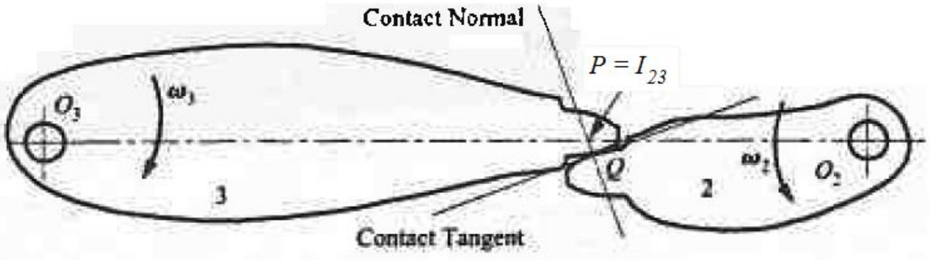
- مرکز آنی I_{23} در محل برخورد عمود مشترک و خط مرکز قرار گرفته است.
- I_{23} نقطه گام (pitch point) نامیده می شود

- اندازه نسبت سرعت

$$\omega_2 O_2 P = \omega_2 O_2 I_{23} = -\omega_3 O_3 I_{23} = -\omega_3 O_3 P$$

$$R = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{O_3 P}{O_2 P}$$

- جهت بدست آوردن نسبت سرعت ثابت باید موقعیت نقطه P در روی خط مراکز ثابت باقی بماند.



- سرعت لغزش(V_S)
  - پارامتر مهمی در ارتباط با نرخ سایش دندانه می باشد.

$$v_s = {}^1v_{Q_2/Q_3} = {}^3v_{Q_2/Q_3} = {}^3v_{Q_2/P_2} + {}^3v_{P_2/P_3} + {}^3v_{P_3/Q_3} = {}^3v_{Q_2/P_2} = {}^3\omega_2\left(r_{Q/P}\right)$$

$${}^3\omega_2 = {}^1\omega_2 - {}^1\omega_3$$

$$v_s = \left(r_{Q/P}\right)\left(\omega_2 - \omega_3\right)$$

$$v_s = PQ\left|\omega_2 - \omega_3\right|$$

سرعت لغزش در نقطه تماس

سرعت لغزش به نسبت فاصله بین نقطه تماس P و نقطه گام Q می باشد.

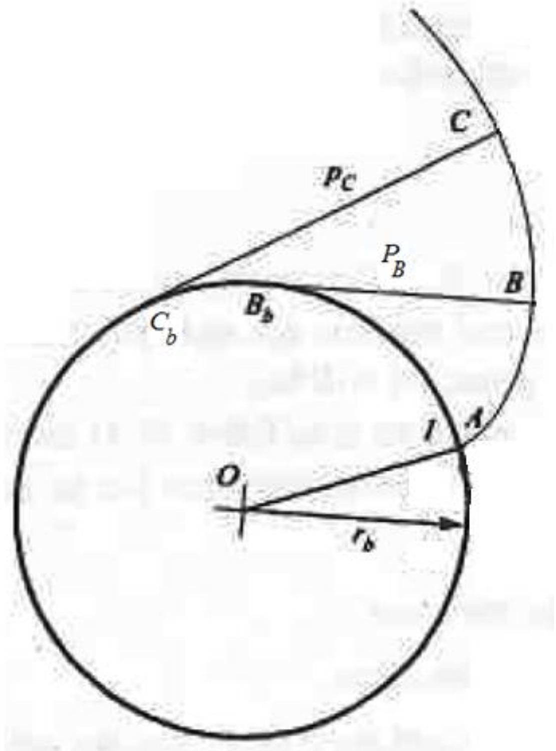
وقتی این دو منطبق باشند ، بطور لحظه ای لغزش داریم.

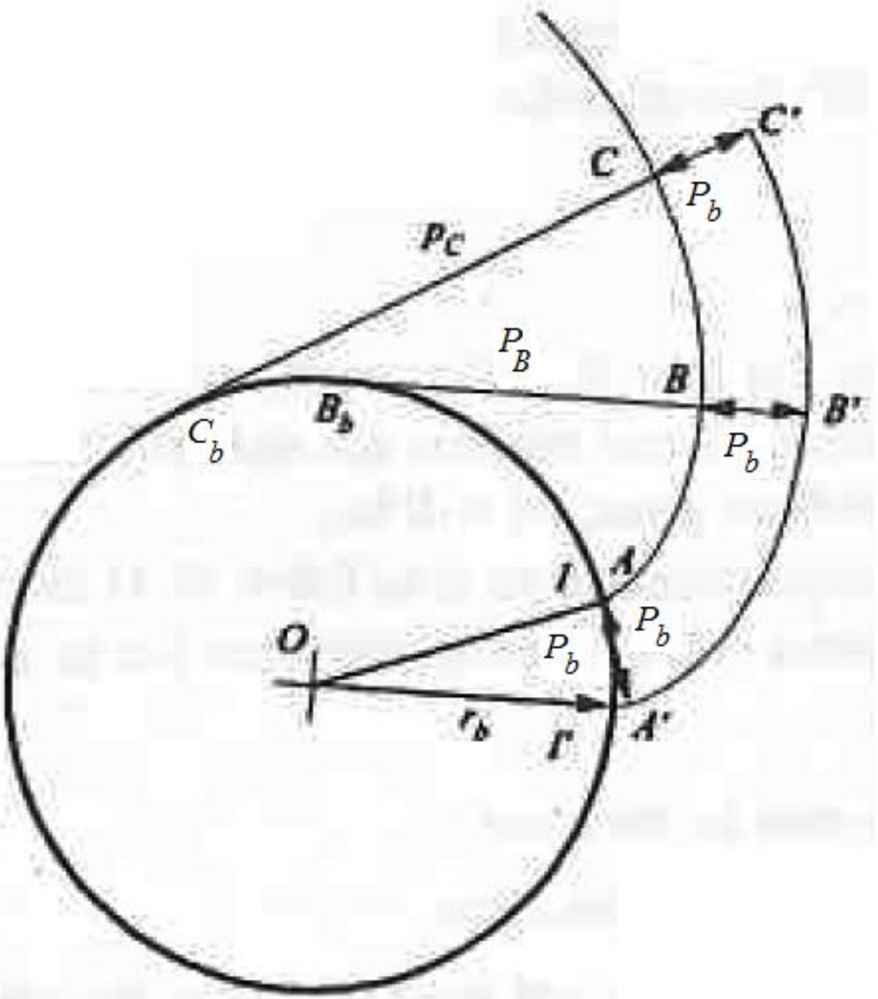
- Involutes
  - بین پروفیلهای ارائه شده برای چرخدنده ها ، involutes و cycloid متداول تر می باشند.
  - بین ایندو نیز در اغلب موارد از involutes استفاده می شود.
  - Involutes مزایای متعددی دارد اما دو مورد مهمتر است:

۱) از لحاظ ساخت با ابزارآلات ساده تری ساخته می شود.

۲) نسبت سرعت حتی در صورت تغییر فاصله مراکز ثابت باقی می ماند.

- پروفیل involutes
  - – مسیر طی شده توسط نقطه انتهای یک رشته که بصورت کاملا کشیده از روی یک دایره باز می شود.
  - – این دایره base circle نامیده می شود





خواص منحنی involutes

۱) عمود بر منحنی در هر نقطه مماس بر دایره پایه است.

۲) طول عمود مساوی قوس متناظر روی دایره پایه است.

$B_bB = \text{arc } B_bI \quad C_bC = \text{arc } C_bI$

فاصله عمودی بین دو involutes که از روی یک دایره پایه باز می شوند مساوی است

$AA' = BB' = CC'$

۱) طول عمود مساوی شعاع انحناء involutes در آن نقطه است.

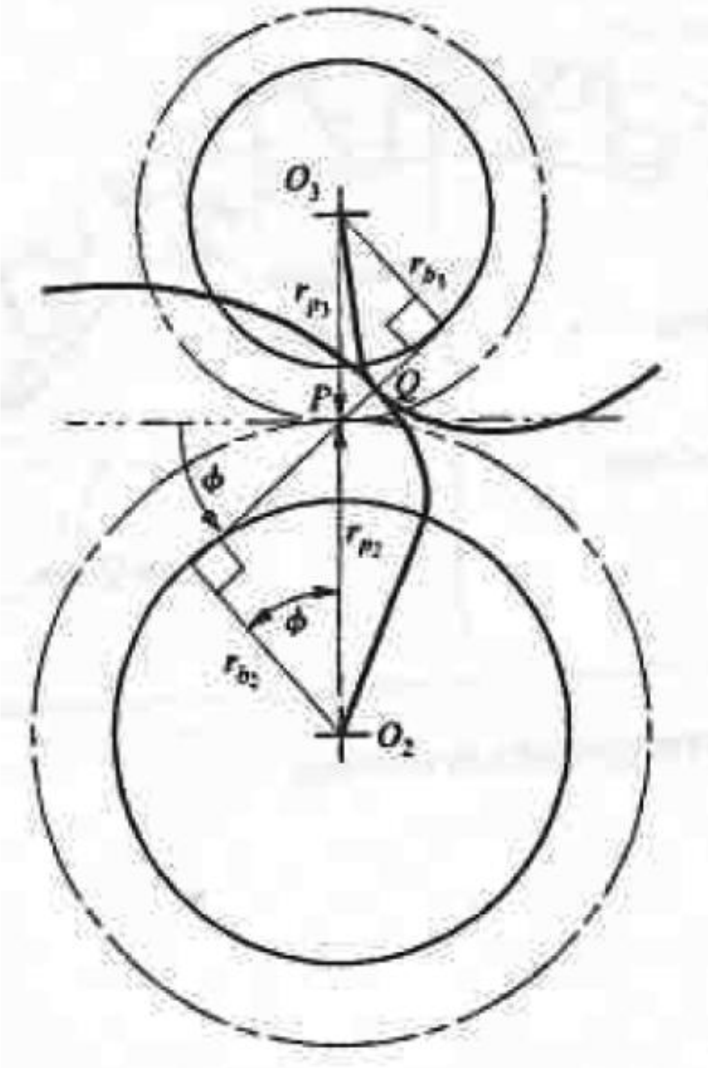
$$B_bB' = \rho_B,\ C_bC' = \rho_C$$

۲) هردو منحنی involutes دلخواه بدون در نظر گرفتن قطر دایره پایه conjugate یکدیگرند.

۳) مسیر تماس بین دو پروفیل involutes خطی است ، در نتیجه زاویه فشار ثابت باقی می ماند.

۴) چرخدنده با دندانه های involutes را می توان توسط یک Straight-sided Rack Cutter تولید کرد.

۵) دو منحنی involutes مزدوج باقی می مانند حتی اگر اندکی فاصله مرکز تغییر نمایید.



در شکل مقابل دو منحنی involutes در موقعیت دلخواه در تماس (نقطه Q) می باشند. عمود در نقطه تماس با دو دایره پایه مماس می باشد. لذا عمود مشترک ثابت باقی می ماند. همچنین محل تلاقی عمود با خط مراکز نقطه P ثابت باقی می ماند. در نتیجه نسبت سرعت ثابت است. (r_p شعاع دایره گام)

$$R = \frac{O_3P}{O_2P} = \frac{r_{p3}}{r_{p2}}$$

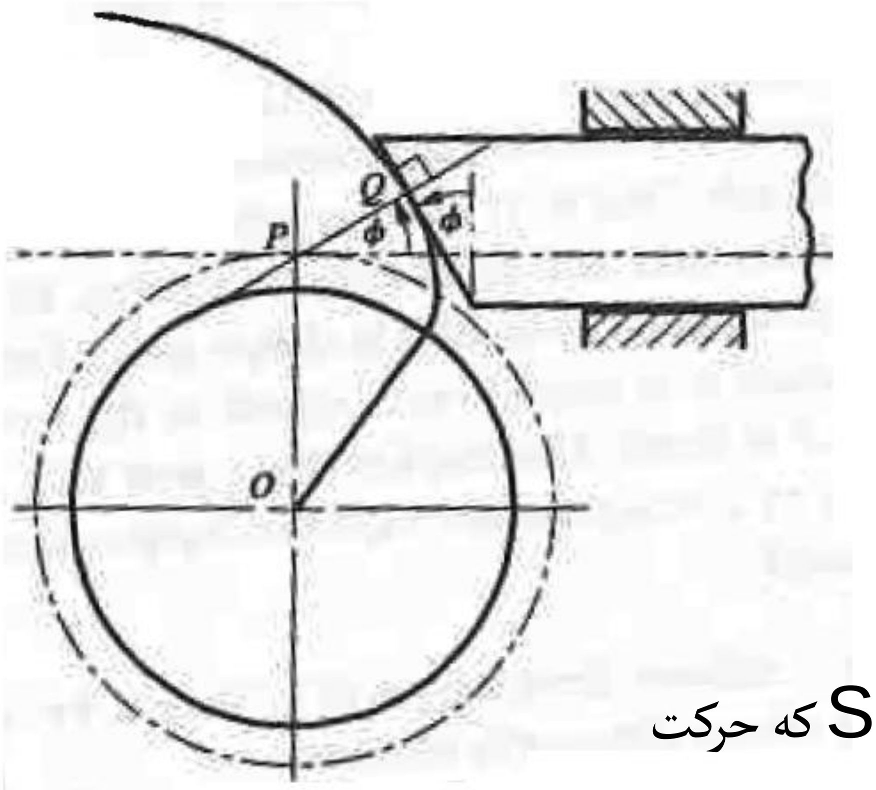
- ارتباط شعاع دایره گام و پایه

$$r_{p_2} = \frac{r_{b_2}}{\cos\phi} \qquad r_{p_3} = \frac{r_{b_3}}{\cos\phi}$$

- زاویه فشار (ϕ) زاویه بین عمود در نقطه تماس و مماس بر دایره های گام می باشد.

- ازآنجائیکه عمود در نقطه تماس ثابت است ، نقطه تماس در روی عمود جابجا می شود.

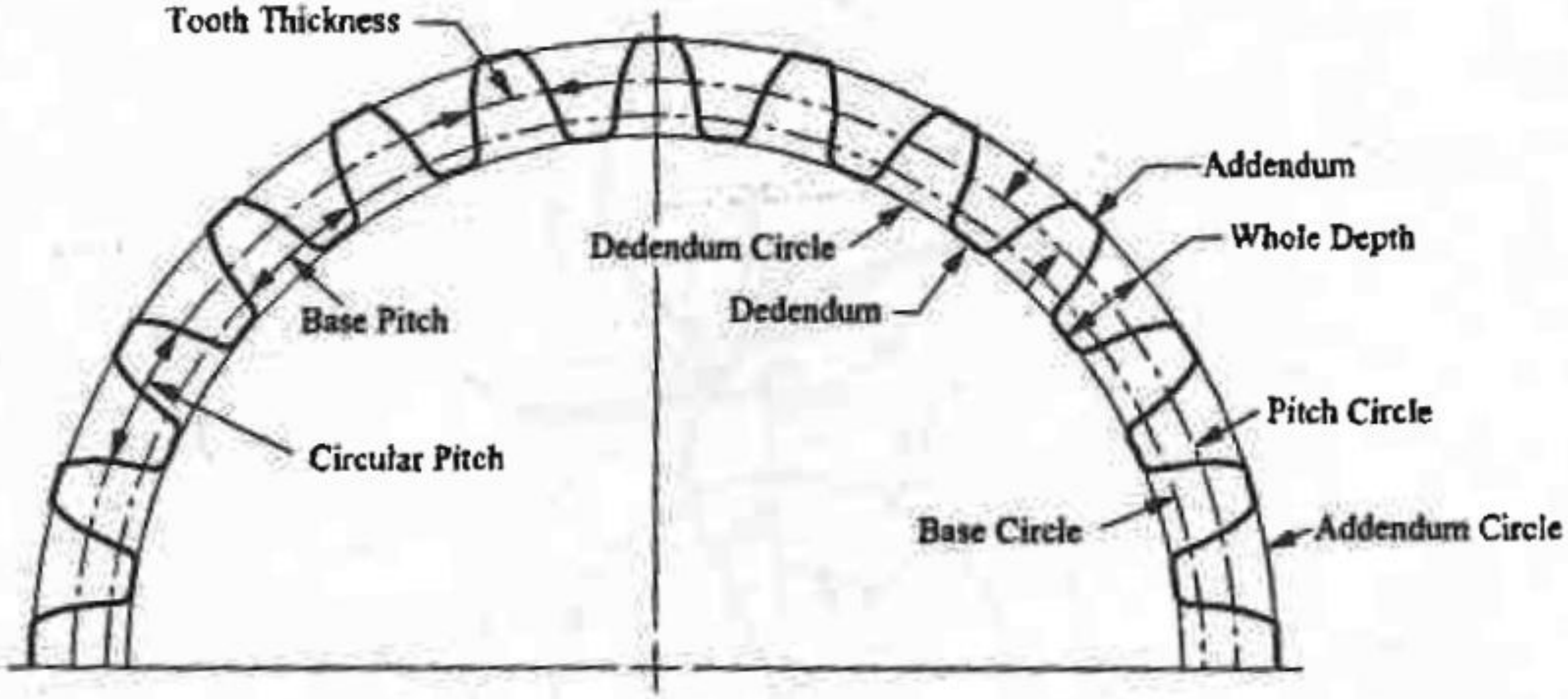
این پروفیل مزدوج یک Straight-Sided Rack می باشد.



اگر یک پروفیل خطی با زاویه ϕ نسبت به خط OP داشته باشیم ، این خط حرکت انتقالی داشته و حرکت دورانی نخواهد داشت.عمود در نقطه تماس همیشه عمود برپروفیل خطی و مماس بر دایره پایه خواهد بود.

نقطه P ثابت است لذا می توان با یک Straight-Sided Rack Cutter که حرکت رفت و برگشتی دارد پروفیل involutes را ایجاد کرد.

- الفاظ استفاده شده در چرخدنده ها



Gear tooth in-plane geometry terminology

- دایره گام در چرخدنده های درگیر نسبت بهم غلتش دارند
- اگرچه یک چرخدنده طوری طراحی می شود که دایره گام معینی داشته باشد اما دایره گام واقعی بستگی به چرخدنده مقابل و فاصله مراکز آنها دارد.

diametral pitch $P_d = N/d_p$

circular pitch $p_c = \pi d_p/N$

- پارامتر های مهم چرخدنده

$$m = \frac{d_p}{N}$$

$$p_c = m\pi$$

$$P_d = \pi / p_c$$

$$P_d p_c = \pi$$

$$p_b = \pi d_b / N$$

$$d_p = \frac{d_b}{\cos\phi}$$

$$p_c = \pi d_p / N = \frac{\pi d_b}{N \cos\phi} = \frac{p_b}{\cos\phi}$$

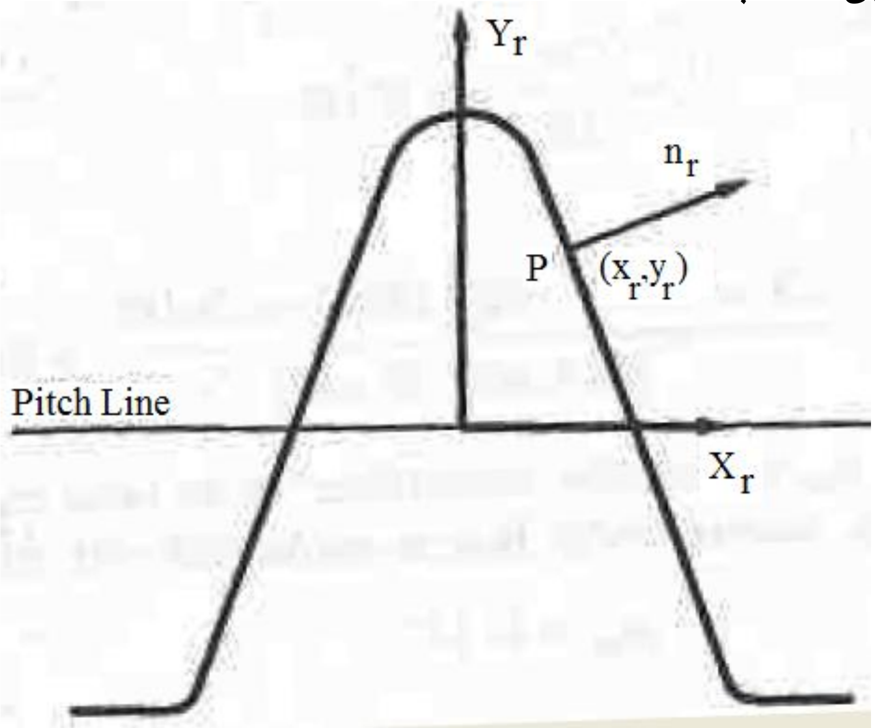
$$p_b = p_c \cos\phi$$

فصل ۹ چرخدنده و انواع آن

- دو چرخدنده در گیر باید گامهای یکسانی داشته باشند
  گام قطری ، گام دایره ای و مدول یکسان
- چرخدنده های که با ابعاد استاندارد ساخته شده باشند ، قابل تعویض می باشند. به عبارت دیگر هر جفت چرخدنده ای که گام یکسانی داشته باشند قابل استفاده در مقابل یکدیگرند.
- لذا باید:
  - زاویه فشار یکسان
  - گام قطری یکسان
  - ارتفاع سر و پای دندانه
  - پهنای دندانه
  - undercut

مختصات یک دندانه involutes تولیده شده توسط یک rack

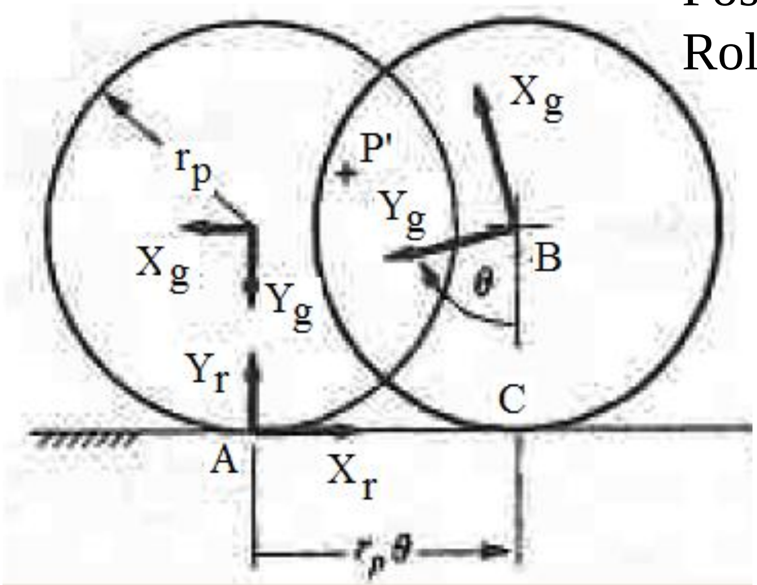
موقعیت نقطه دلخواه مانند P روی rack با مختصات (x_r,y_r) نمایش داده شده که نسبت به دستگاه مختصات ثابت به rack می باشد. بردار نرمال بر سطح نیز با $n_r=(n_x,n_y)$ نمایش داده می شود. براحتی این مختصات و بردار نرمال قابل محاسبه است.



- دستگاه مختصات اول متصل به rack ثابت فرض می شود (X_r, Y_r)
- دستگاه مختصات دوم متصل به gear و با آن حرکت دورانی خطی دارد (x_g, y_g)
- نقطه p' متعلق به gear متناظر با نقطه P در روی rack است.
- دایره گام چرخدنده روی خط گام rack غلتش دارد.
- نقطه P در لحظه تماس با P' تماس لغزشی (direct contact) دارد.

initial position of gear

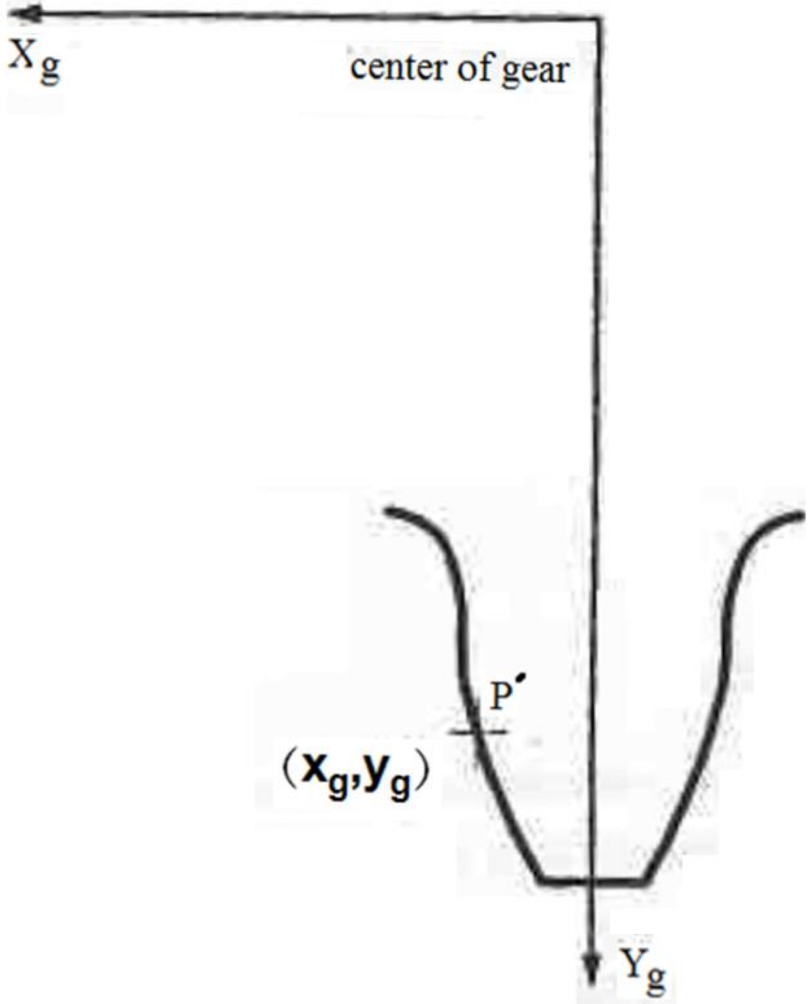
Position of the Gear After Rolling Through an Angle θ



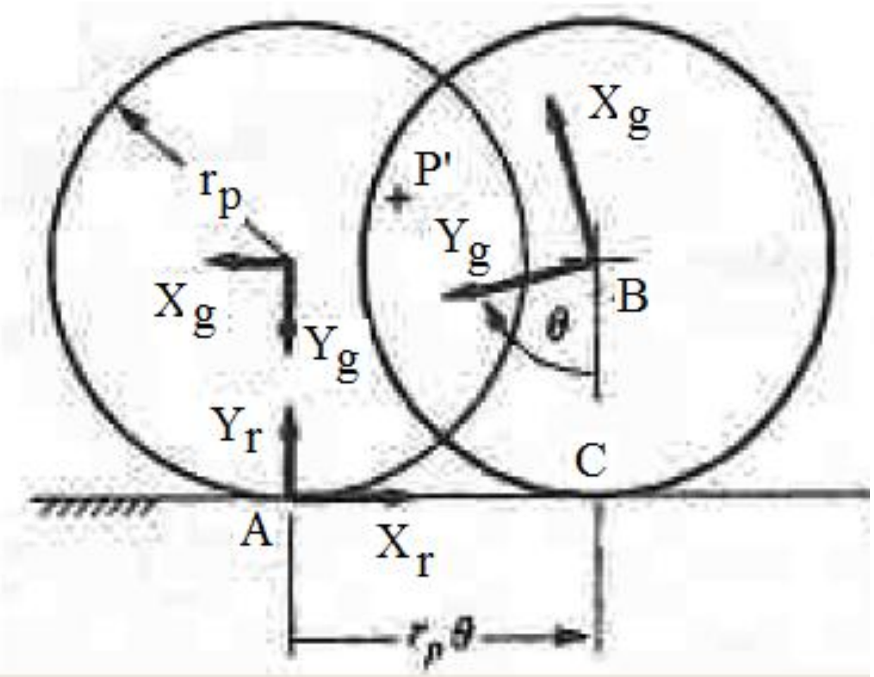
Pitch Circle of gear

pitch line of rack

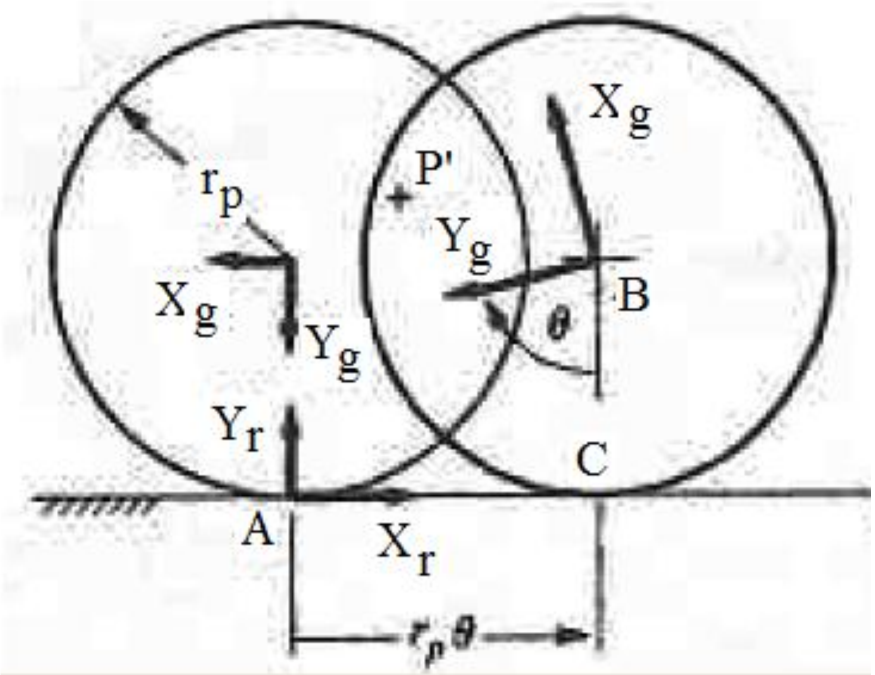
دستگاه مختصات متحرک متصل به چرخدنده و نقطه **p’** متعلق به **gear** متناظر با نقطه **P** در روی **rack** میباشد.



- در موقعیت دوم در شکل زیر چرخدنده به اندازه زاویه θ دوران و به اندازه $r_p\theta$ جابجائی خطی داشته است.
- برای این موقعیت دلخواه ماتریس تبدیل از دستگاه rack به دستگاه چرخدنده به صورت زیر بدست می آید:



$$\begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r - r_p\theta \\ y_r - r_p \end{Bmatrix}$$



سرعت نسبی نقطه P’ نسبت به دستگاه

rack ، نقطه C مرکز آنی است

$$ {}^r v_P = {}^r v_{B/C} + {}^r v_{P/B} $$

$$ {}^r v_P = {}^r\omega_g \times r_{B/C} + {}^r\omega_g \times r_{P/B} = {}^r\omega_g \times \left(r_{B/C} + r_{P/B} \right) = {}^r\omega_g \times r_{P/C} $$

$$ {}^r v_P = -{}^r\omega_g \begin{Bmatrix} y_r \\ r_p\theta - x_r \end{Bmatrix} $$

- توجه نمایید که سرعت نسبی در این نقطه نباید مولفه عمود بر سطح داشته باشد. در نتیجه داریم:

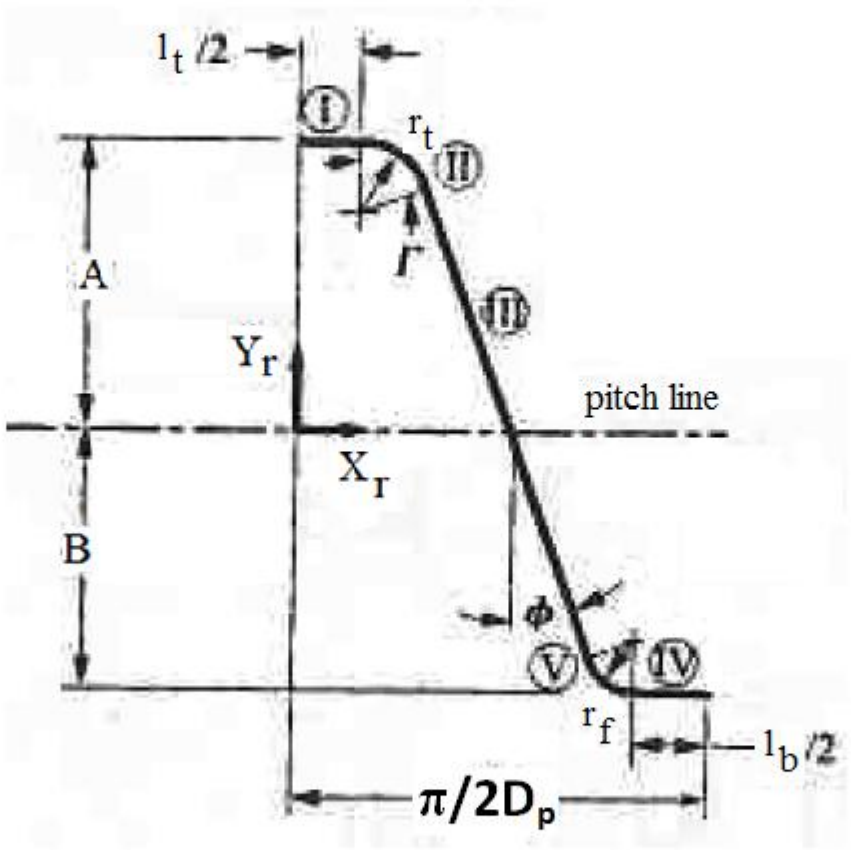
$$^{r}v_P \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 0$$

$$-n_x y_r + \left(x_r - r_p\theta\right) n_y = 0$$

زاویه دورانی که در آن نقطه **P** با نقطه متناظر در روی چرخدنده در تماس است.

$$\theta = \frac{n_y x_r - n_x y_r}{r_p n_y}$$

- پروفیل نصف دندانه یک rack در شکل نشان داده شده است.



D_p	=	diametral pitch
A	=	addendum of rack
B	=	dedendum of rack
ϕ	=	pressure angle
r_t	=	radius of tip of rack tooth
r_f	=	radius of fillet of rack tooth

- تعریف پارامترهای مورد استفاده

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\ell_t = \frac{\pi}{2D_p} - 2A\tan\phi - 2r_t\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\ell_b = \frac{\pi}{2D_p} - 2B\tan\phi - 2r_f\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$r_t = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2A\tan\phi}{2\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

$$r_f = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2B\tan\phi}{2\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

- روابط در ناحیه های مختلف

Region I (top land)

$$\begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta \ell_t/2 \\ A \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

Region II (tip radius)

$$\begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell_t/2 + r_t \sin(\beta\Gamma) \\ A - r_t[1 - \cos(\beta\Gamma)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\beta\Gamma) \\ \cos(\beta\Gamma) \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

Region III (tooth flank)

$$\begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-\beta)[\ell_t/2 + r_t \sin(\Gamma)] + \beta[\pi/(2D_p) - \ell_b/2 - r_f \sin\Gamma] \\ (1-\beta)[A - r_t\{1 - \cos(\Gamma)\}] + \beta[-B + r_f(1 - \cos\Gamma)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{Bmatrix} \quad (0 < \beta \le 1)$$

- روابط در ناحیه های مختلف

Region IV (root fillet)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pi/(2D_p) - \ell_b/2 - r_f \sin[(1-\beta)\Gamma] \\ -B + r_f\{1-\cos[(1-\beta)\Gamma]\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin[(1-\beta)\Gamma] \\ \cos[(1-\beta)\Gamma] \end{Bmatrix} \quad (0<\beta\le 1)$$

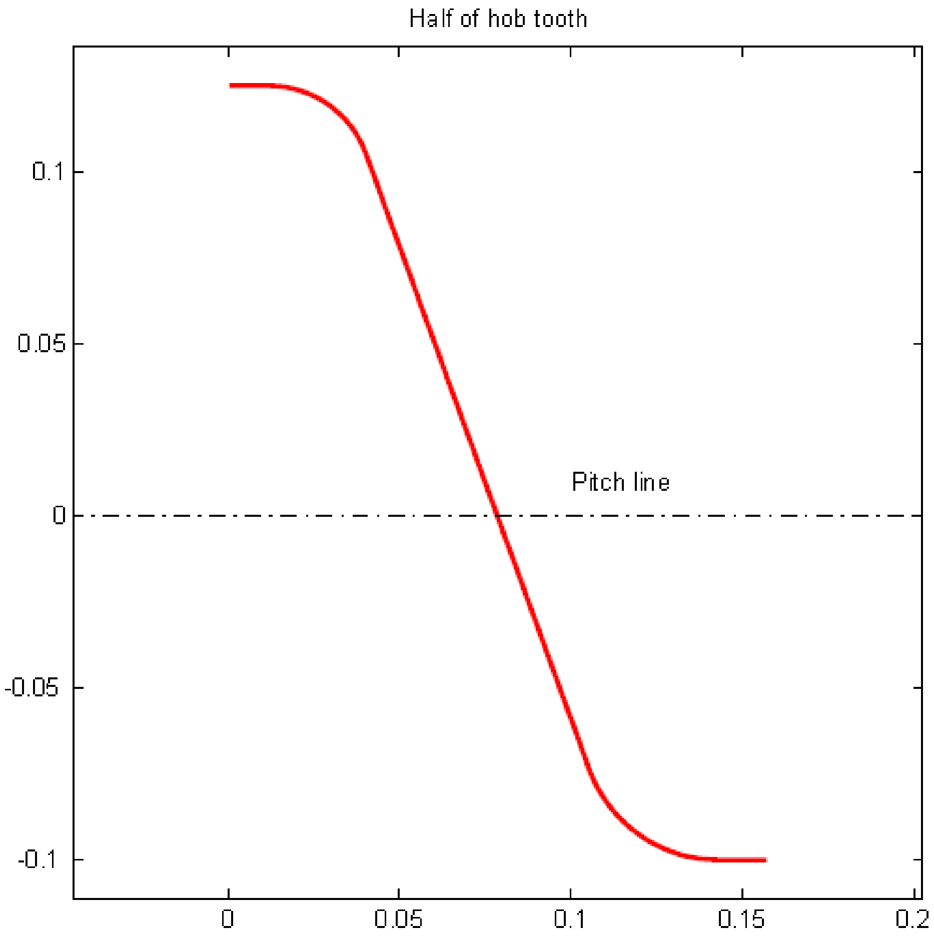
Region V (bottom land)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pi/(2D_p) - \ell_b/2(1-\beta) \\ -B \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (0<\beta\le 1)$$

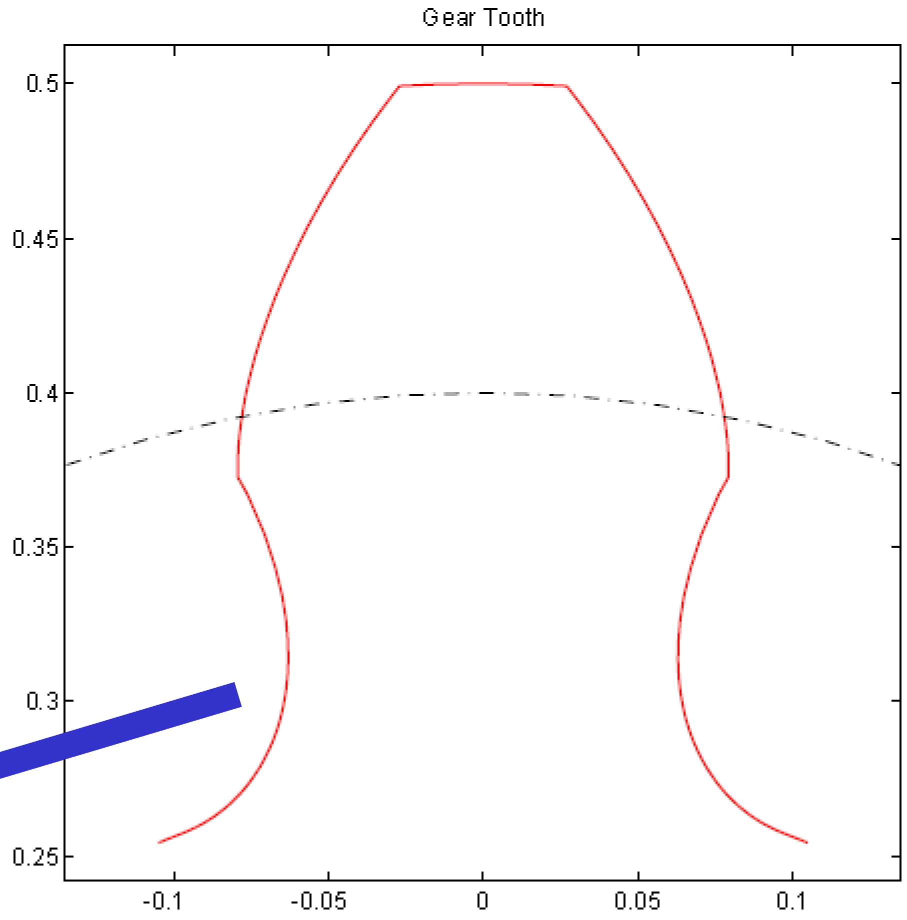
Assume that the above rack is used to generate a gear. The pressure angle is 20° with a diametric pitch (D_p) of 10 teeth per inch. The rip and root radii are both 0.0I in. The addendum constant for the rack is 1.25, and the dedendum constant is 1.1. There are 15 teeth on the gear, and the addendum constant for the gear is 1.0. Determine the shape of the gear tooth.

mfile : geardr.m

- Gear Tooth Generation Program
- Enter 1 for file input and 2 for interactive input [1]: 2
- Enter input file name (geardr.dat): manual.dat
- Enter value of diametral pitch [10]: 10
- Enter value of addendum constant for rack [1.25]: 1.25
- Enter value of dedendum constant for rack[1.0]: 1.0
- Enter value of pressure angle in degrees [20]: 20
- Enter radius of tip of rack tooth [0.02]: 0.03
- Enter radius of fillet of rack tooth [0.04]: 0.04
- Enter number of teeth on gear [10]: 8
- Enter value of addendum constant for gear [1.0]: 1
- Enter number of points in rack tip land [30]: 30
- Enter number of points in rack tip radius [30]: 30
- Enter number of points in rack flank [40]: 40
- Enter number of points in rack base radius [30]: 30
- Enter number of points in rack bottom land [30]: 30



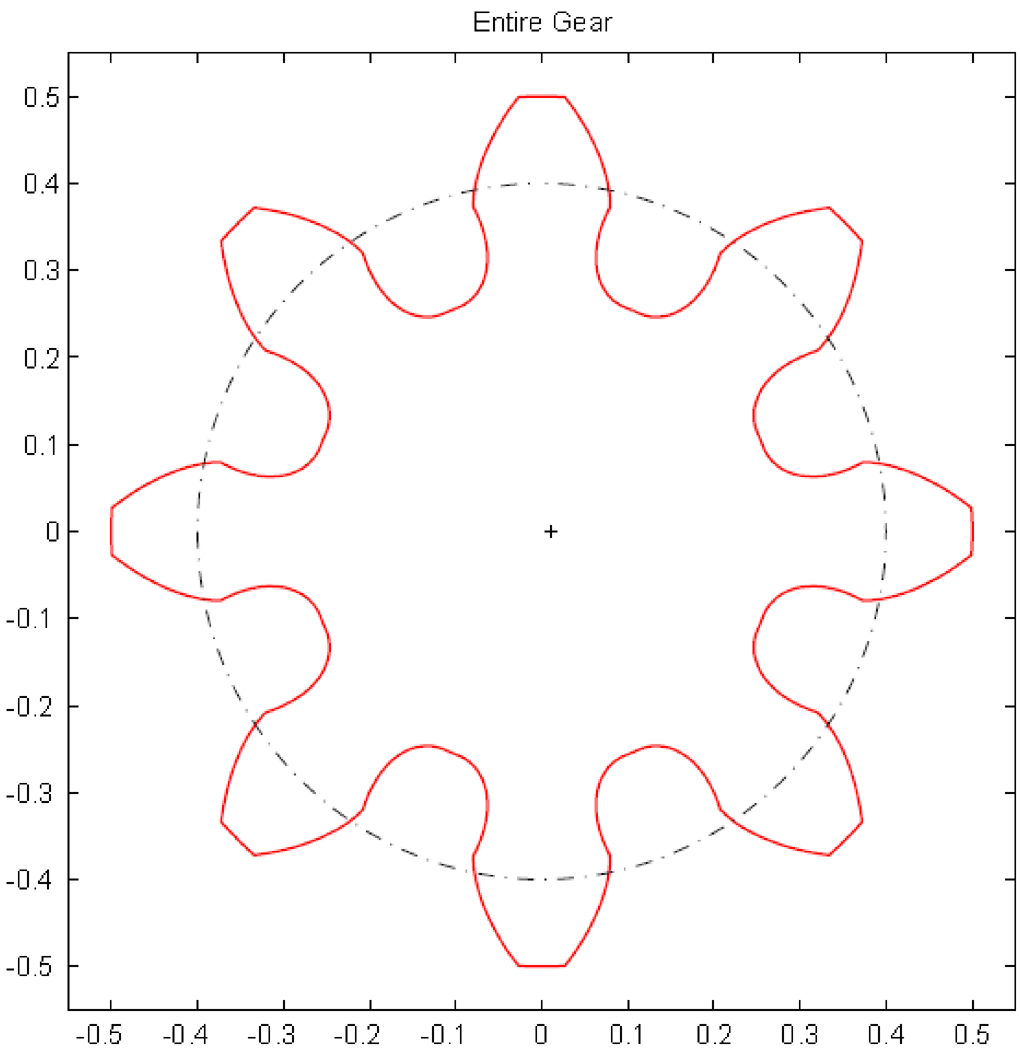
Drawing of half of rack tooth



آیا پروفیل درست است

Drawing of one tooth of gear

Drawing of entire gear



چند مثال دیگر

Program for Drawing Rack Envelope (*rackmotion.m)*

Conjugate Gear Tooth Generation Program ***arb2th.m***

فصل ۹ چرخدنده و انواع آن

مجموعه چرخدنده ها

از روشهای متعددی می توان جفت چرخدنده ها را ترکیب نمود و ارتباط ورودی/خروجی مورد نظر را بدست آورد.

انواع مجموعه چرخدنده هایی که در این فصل بررسی می شوند عبارتند از:

a) مجموعه چرخدنده های ساده Simple Gear Train
b) مجموعه چرخدنده های مرکب Compound Gear Train
c) مجموعه چرخدنده های خورشیدی Planetary Gear Train

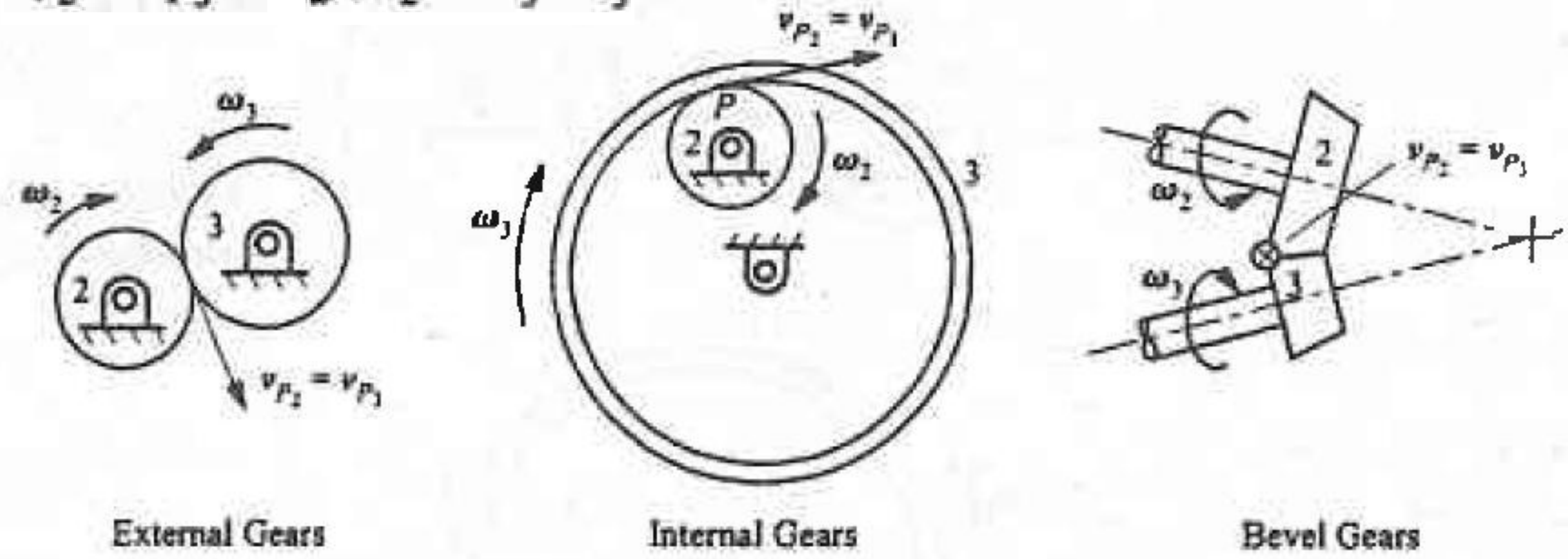
جهت دوران و نسبت سرعت

علامت مثبت برای تماس چرخدنده داخلی

وخارجی علامت منفی برای تما س خارجی

$$R = \pm\frac{\omega_2}{\omega_3} = \pm\frac{r_3}{r_2} = \pm\frac{N_3}{N_2}$$

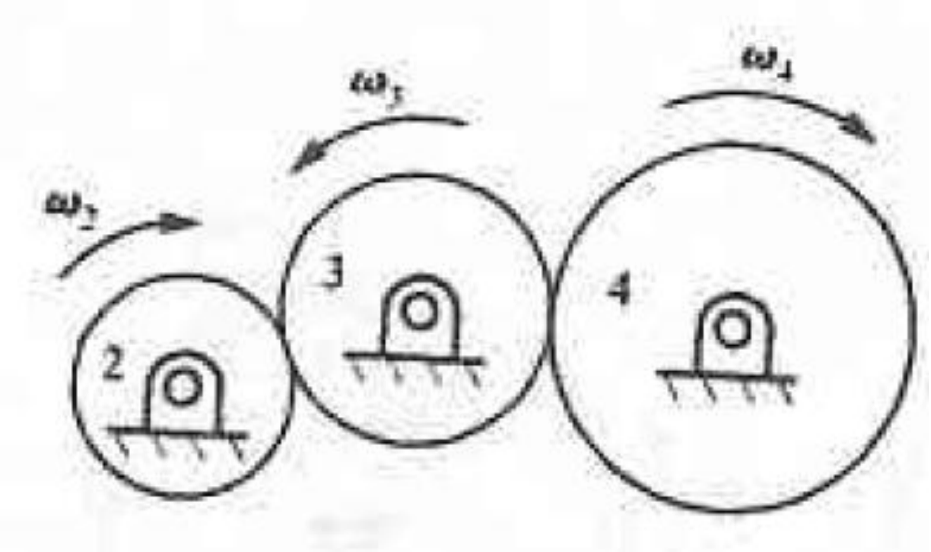
$$v_{P2} = v_{P3} = \omega_2 \times r_2 = \omega_3 \times r_3$$



مجموعه چرخدنده های ساده

در این مجموعه محور چرخدنده ها ثابت می باشد

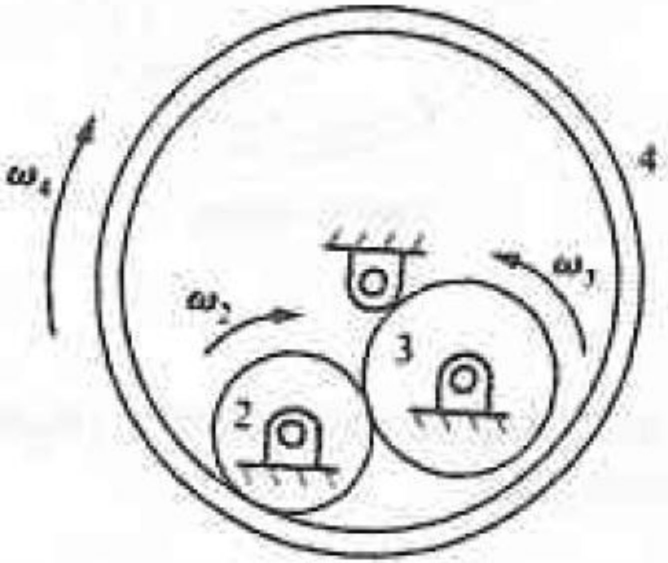
در مجموعه می تواند چرخدنده هرزگرد وجود داشته باشد که برای تغییر جهت دوران و یا به عنوان Spacer استفاده می شود.



$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2} \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{N_4}{N_3}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3}\frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{N_3}{N_2}\right)\left(-\frac{N_4}{N_3}\right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^2 \frac{N_4}{N_2}$$



$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^1 \frac{N_4}{N_2}$$

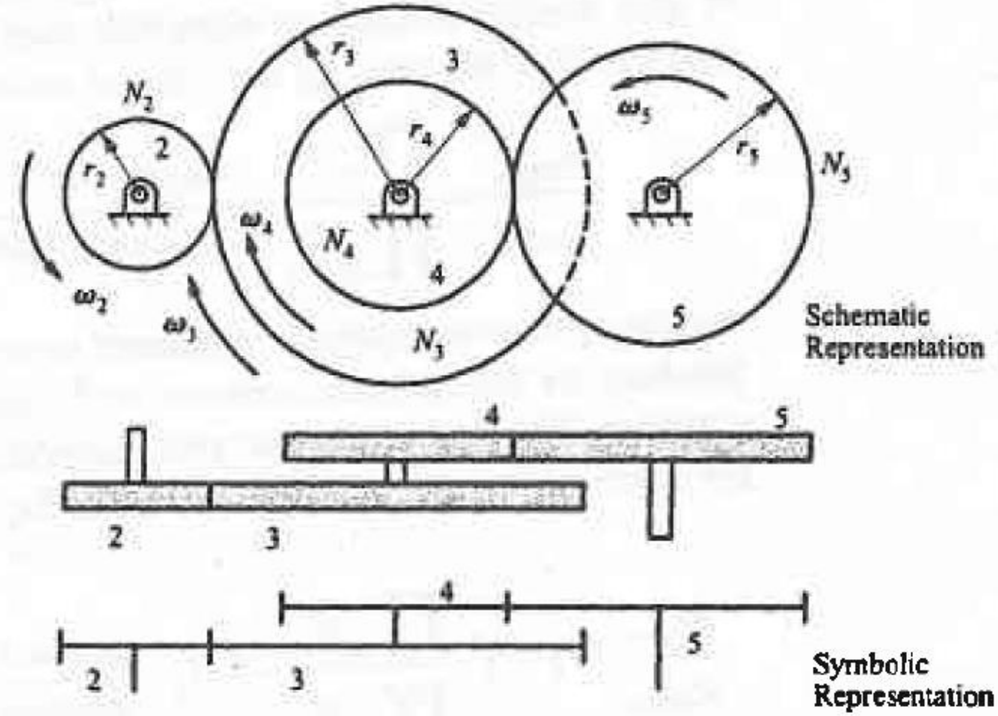
مجموعه چرخدنده های مرکب

نسبت سرعت در هر تماس محدودیت دارد ، مثلا برای چرخدنده ساده نباید از 1/5 تجاوز نماید. کاهش بیشتر توسط مجموعه چرخدنده های مرکب انجام می شود.

در این نوع مجموعه ها روی یک محور دو یا چند چرخدنده متصل است.

بر خلاف مجموعه های ساده ، چرخدنده ها در مجموعه مرکب می توانند مدول و یا نوع متفاوتی داشته باشند.

مجموعه چرخدنده مرکب



$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2}$$

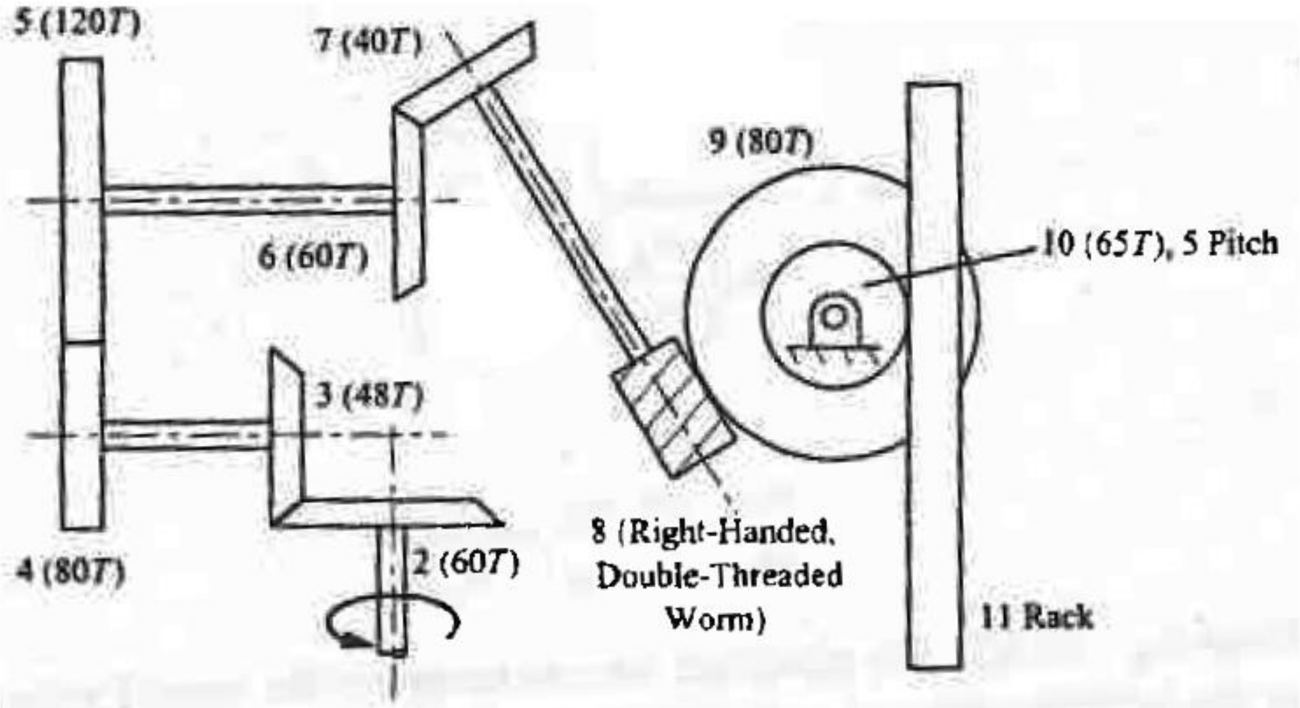
$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = -\frac{N_5}{N_4}$$

$$\omega_3 = \omega_4$$

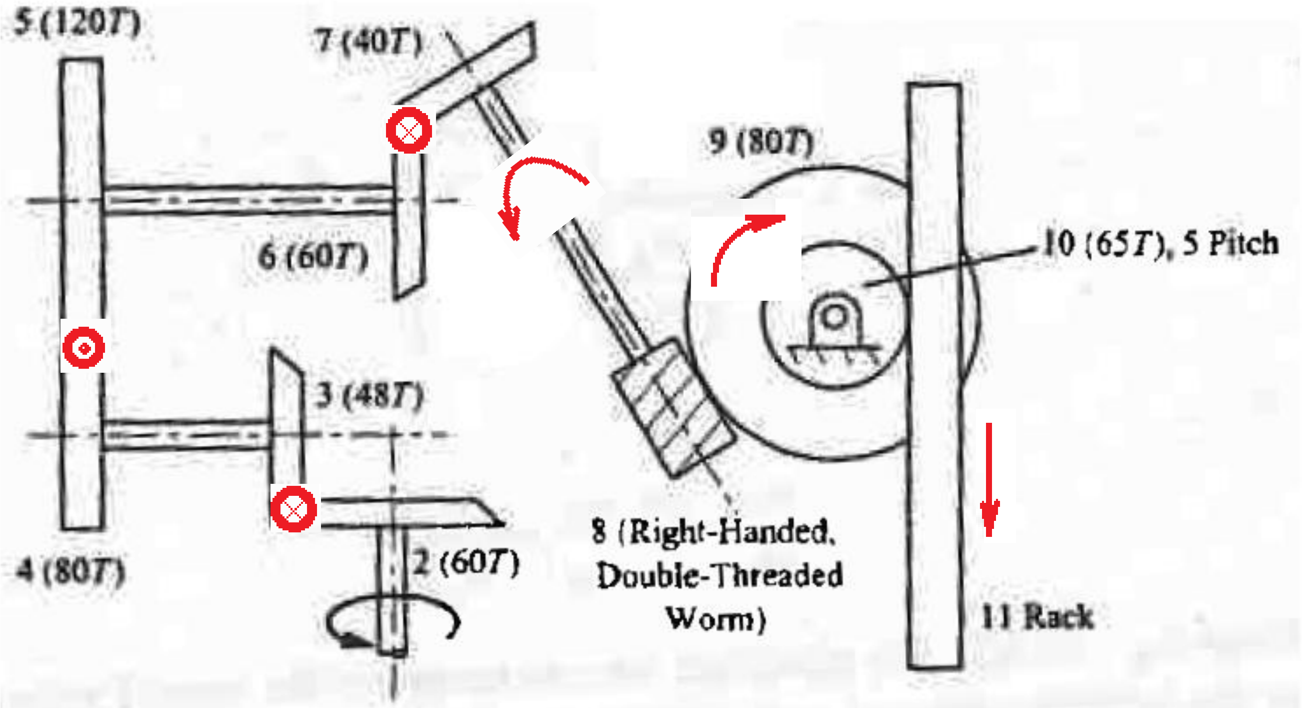
$$\frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{-\omega_3\left(\dfrac{N_3}{N_2}\right)}{-\omega_4\left(\dfrac{N_4}{N_5}\right)} = \frac{\left(\dfrac{N_3}{N_2}\right)}{\left(\dfrac{N_4}{N_5}\right)} = \frac{N_3 N_5}{N_2 N_4}$$

$$\frac{\omega_{input}}{\omega_{output}} = \frac{\prod_{i=3}^{n} N_i}{\prod_{i=3}^{n} N_j} = \frac{\text{product of driven tooth numbers}}{\text{product of driver tooth numbers}}$$

مثال: سرعت زاویه ای محور۲ (ورودی) (rpm) ۲۰۰ در جهت نشان داده شده می باشد. سرعت زاویه ای محور ۱۰ و سرعت خطی **rack** را بدست آورید.



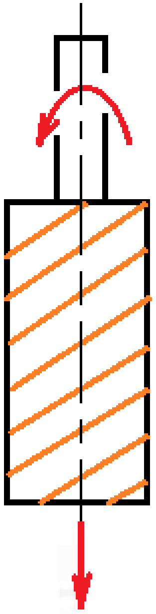
ابتدا جهت دوران هر محور را معین نمایید

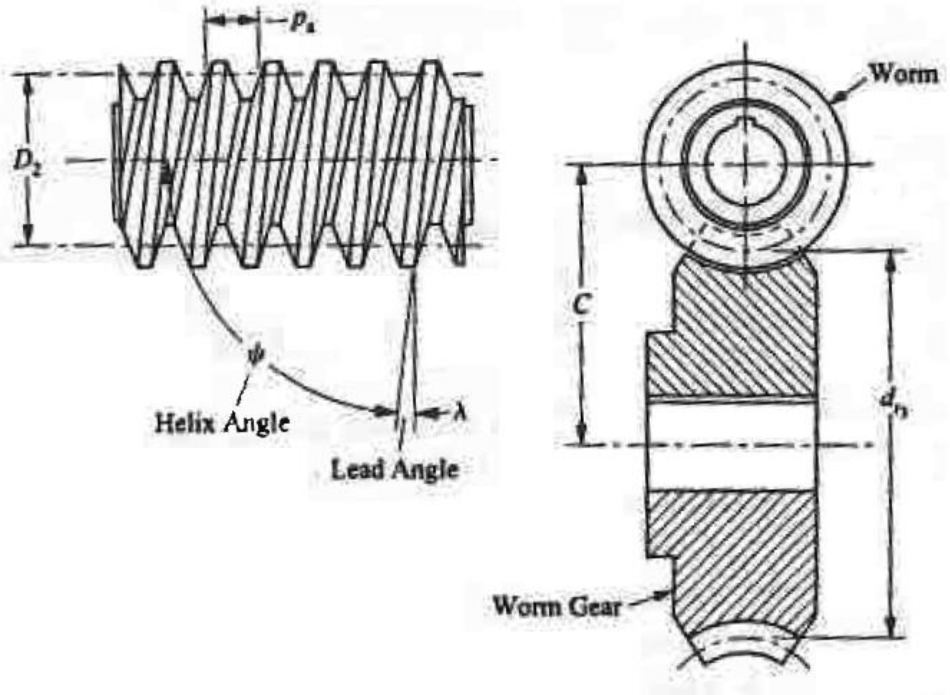


حلزون راستگرد دو راهه

- پیچ راستگرد

- در صورتی که پیچ حرکت محوری نداشته باشد ، جهت حرکت معکوس می شود.





نسبت سرعت بین چرخدنده ۹ و ۲

$$\frac{\omega_9}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5}\frac{N_6}{N_7}\frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = \omega_2 \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5}\frac{N_6}{N_7}\frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = 200\frac{60}{48}\frac{80}{120}\frac{60}{40}\frac{2}{80} = 6.25 \text{ rpm}$$

سزعت خطی (rack) برابر با سرعت خطی نقطه گام روی چرخدنده ۱۰ می باشد.

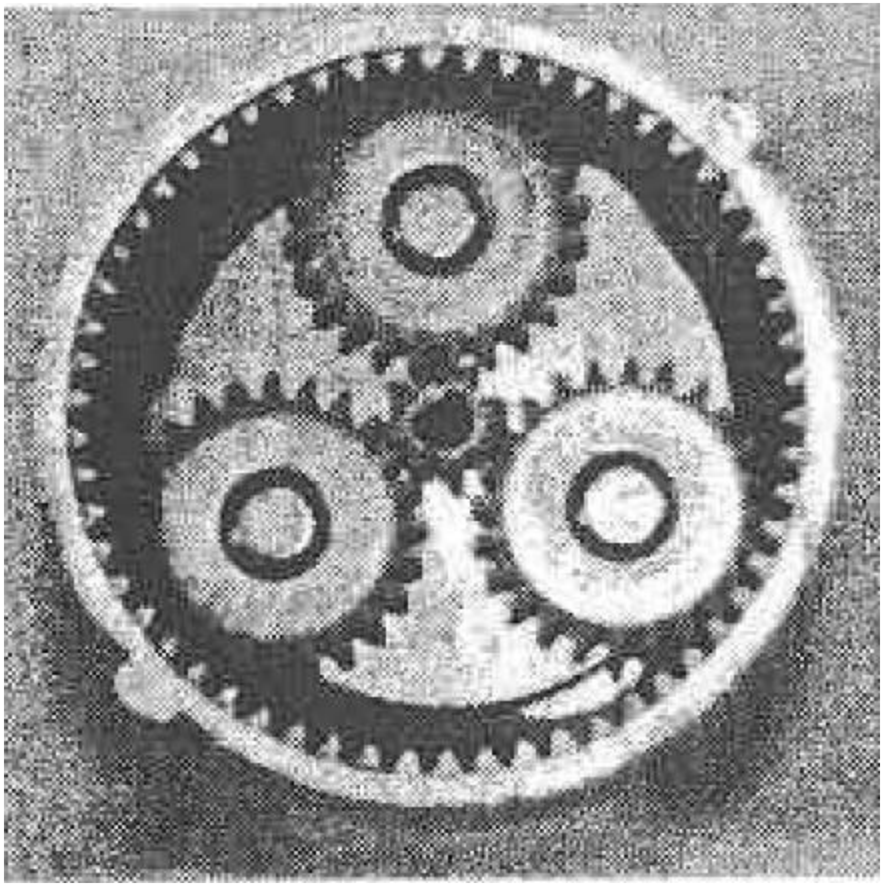
سرعت زاویه ای چرخدنده ۹ و ۱۰ برابر است

جهت حرکت rack را دوباره بررسی نمایید.

$$d_{10} = \frac{N_{10}}{P_{10}} = \frac{65}{5} = 13 \text{ in}$$

$$v = (\omega_{10})(d_{10}/2) = (6.25)(13/2)(2\pi/60) = 4.255 \text{ in/s}$$

مجموعه چرخدنده های خورشیدی



اجزاء این مجموعه عبارتند از:

۱) Sun Gear ثابت یا متحرک

۲) Planet Gear یک یا چند

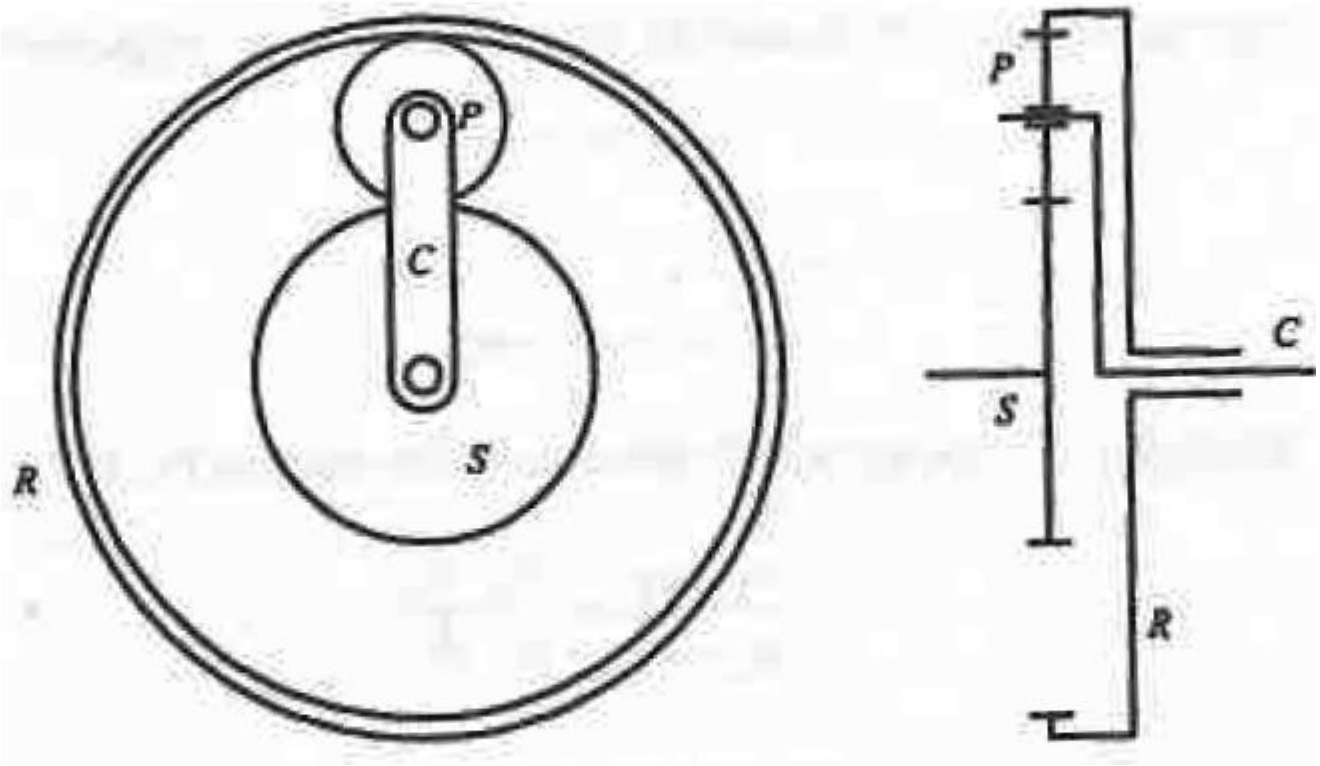
۳) Planet Carrier یا arm

۴) چرخدنده داخلی حلقه ای شکل

(همیشه استفاده نمی شود)

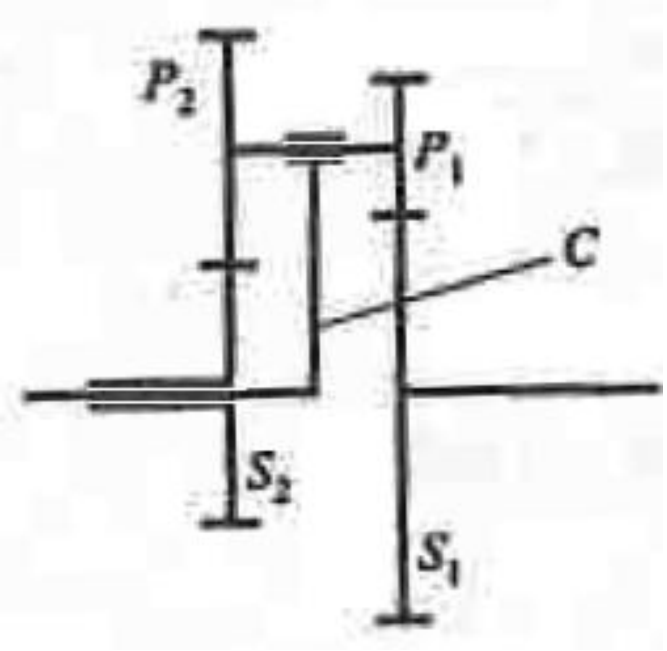
مجموعه چرخدنده خورشیدی ساده

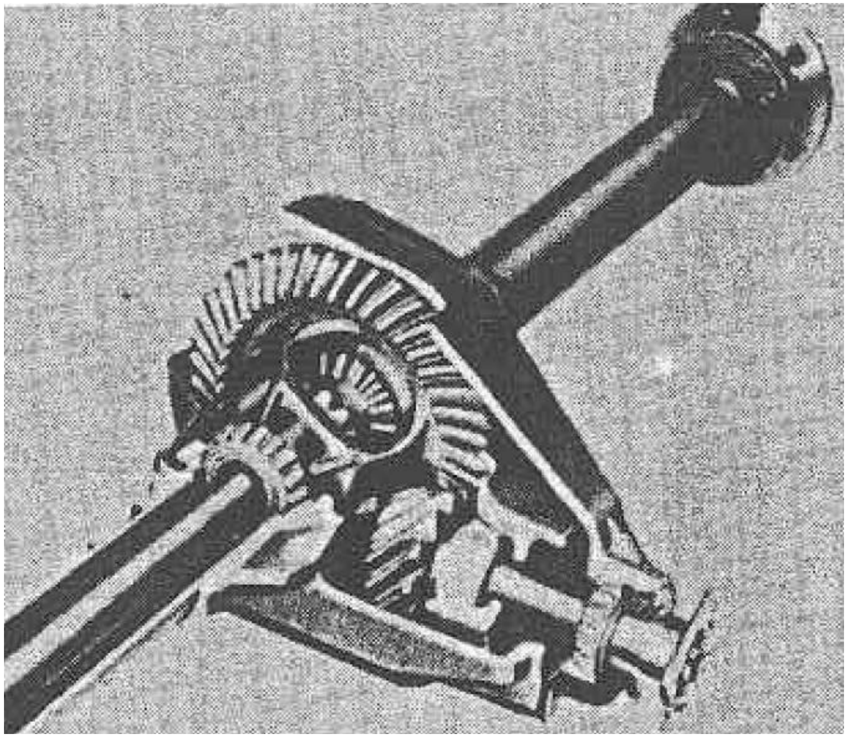
در سیستم سه محور وجود دارد لذا سیستم دارای دو درجه آزادی است



توسط مجموعه چرخدنده خورشیدی مرکب می توان نسبت کاهش شدید سرعت بدست آورد. در مثال زیر دو محور ورودی و یک محورخروجی وجود دارد.

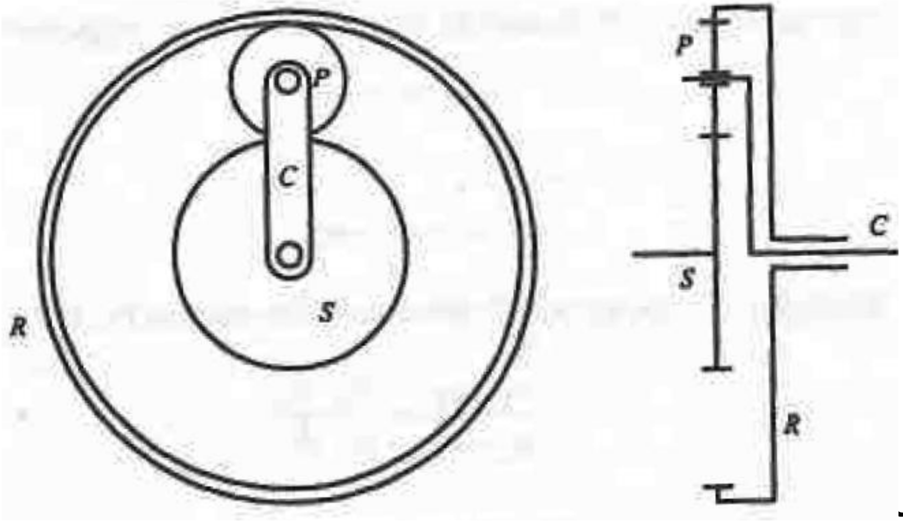
یکی از متداولترین موارد استفاده از چرخدنده خورشیدی دیفرانسیل خودرو می باشد.





تحلیل چرخدنده خورشیدی از دو روش معدله و جدول انجام می شود.

مثال: اگر چرخدنده ۲ ورودی باشد ، رابطه ای بین سرعت زاویه ۲ و ۴ و تعداد دندانه ها بدست آورید.



$$\omega_2 = {}^C\omega_2 + \omega_C$$

$$\omega_4 = {}^C\omega_4 + \omega_C$$

$$\frac{{}^C\omega_2}{{}^C\omega_4} = -\frac{N_4}{N_2}$$

اگر arm ثابت باشد چرخدنده های معمولی

بوده ، و چرخدنده سیاره ای به صورت هرزگرد عمل می کند

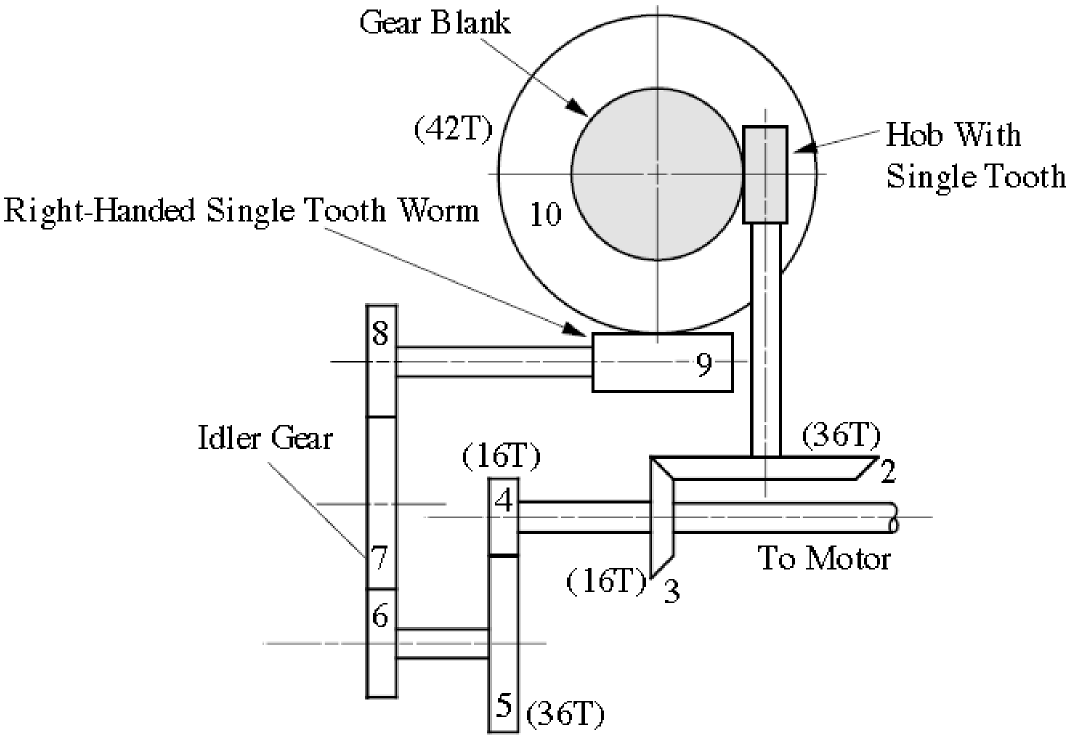
این معادله ارتباط بین سرعتهای محور های

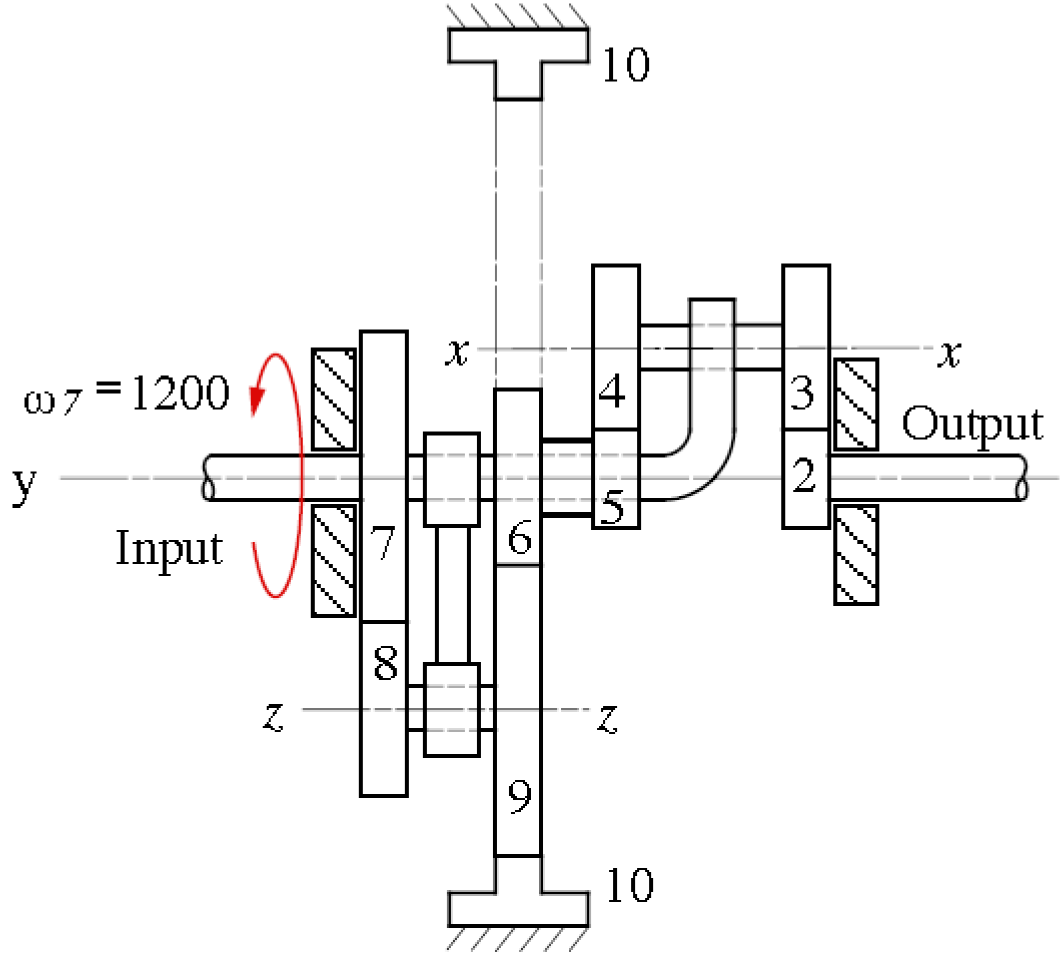
۲ ، ۴ و C را معین می سازد.

$$\frac{\omega_2 - \omega_C}{\omega_4 - \omega_C} = -\frac{N_4}{N_2}$$

مسائل

۱- مجموعه چرخدنده نشان داده شده در شکل برای دستگاه Hob انتخاب شده است. قطعه خام و چرخ حلزون (۱۰) روی یک محور نصب شده و با هم دوران می کنند. اگر قطعه خام ساعتگرد دوران کنند ابزار Hob راستگرد است یا چپگرد؟ در صورتیکه روی قطعه خام ۷۲ دندانه مورد نظر باشد ، نسبت ω_8/ω_6 را بدست آورید.

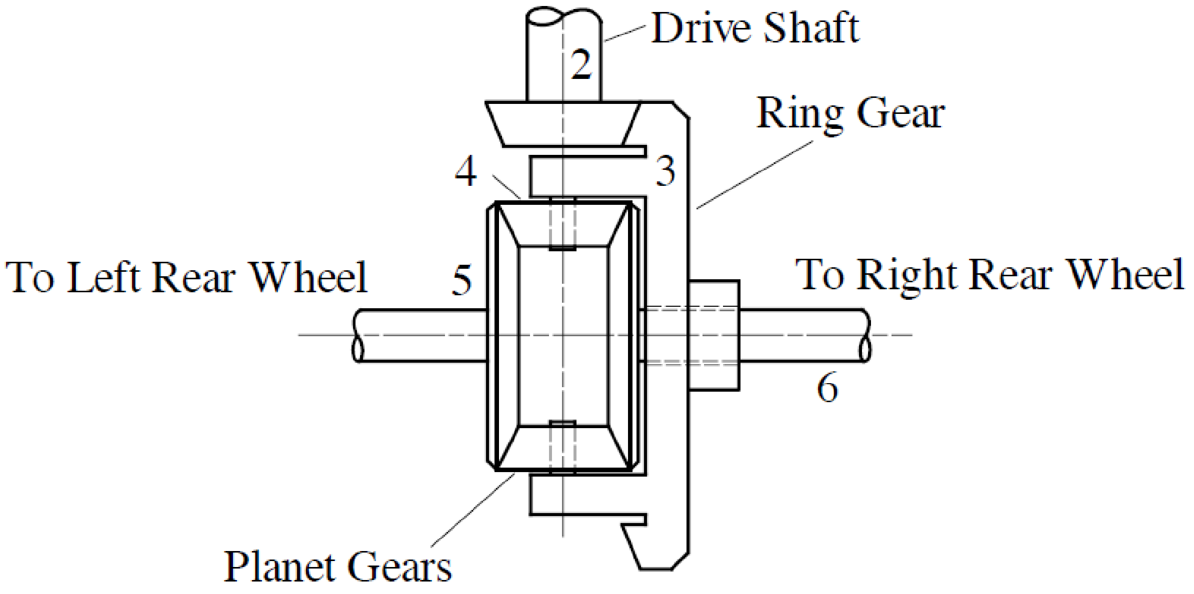




۲- در شکل محور y-y ثابت ، در حالیکه محورهای x-x و z-z با بازو حرکت می کنند. چرخدنده ۷ به بازو ثابت شده است. چرخدنده های ۳ و۴ ، ۵و۶ ، ۷و۸ ، نسبت بهم صلب می باشند. چرخدنده های ۳و ۴ سیاره ای حرکت می کنند. سرعت و جهت دوران محور خروجی را بدست آورید.

$N2 = 16T,\ N3 = 20T,\ N4 = 22T,$
$N5 = 14T,\ N6 = 15T,\ N7 = 36T,$
$N8 = 20T,\ N9 = 41T,\ N10 = 97T,$

۳- در شکل دیفرانسیل یک خودرو محور عقب نشان داده شده است. قطر چرخ خودرو ۶۰۹/۶ می باشد. اگر سرعت زاویه محور محرک 900 rpm باشد و هیچیک از چرخها لغزشی نداشته باشند ، سرعت خورو را بدست آورید.



$N_2 = 28T$

$N_3 = 92T$

$N_4 = 22T$

$N_5 = 30T$

$N_6 = 30T$

۴- در مسئله فوق در نظر بگیرید که چرخ سمت راست در روی یخ قرار گرفته و آزادانه دوران می کند. فرض نزدیک به واقع برای سرعت دورانی چرخ سمت چپ چه مقدار است ، چرا ؟ با این فرض سرعت دورانی چرخ سمت چپ چقدر است ؟ سرعت محور ورودی را 500 rpm در نظر بگیرید.

پایان

فصل ۱۰

تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

تعادل استاتیکی

معادله اول نیوتن برای هر عضو سازه ،گشتاور حول نقطه دلخواه

$$\sum F = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

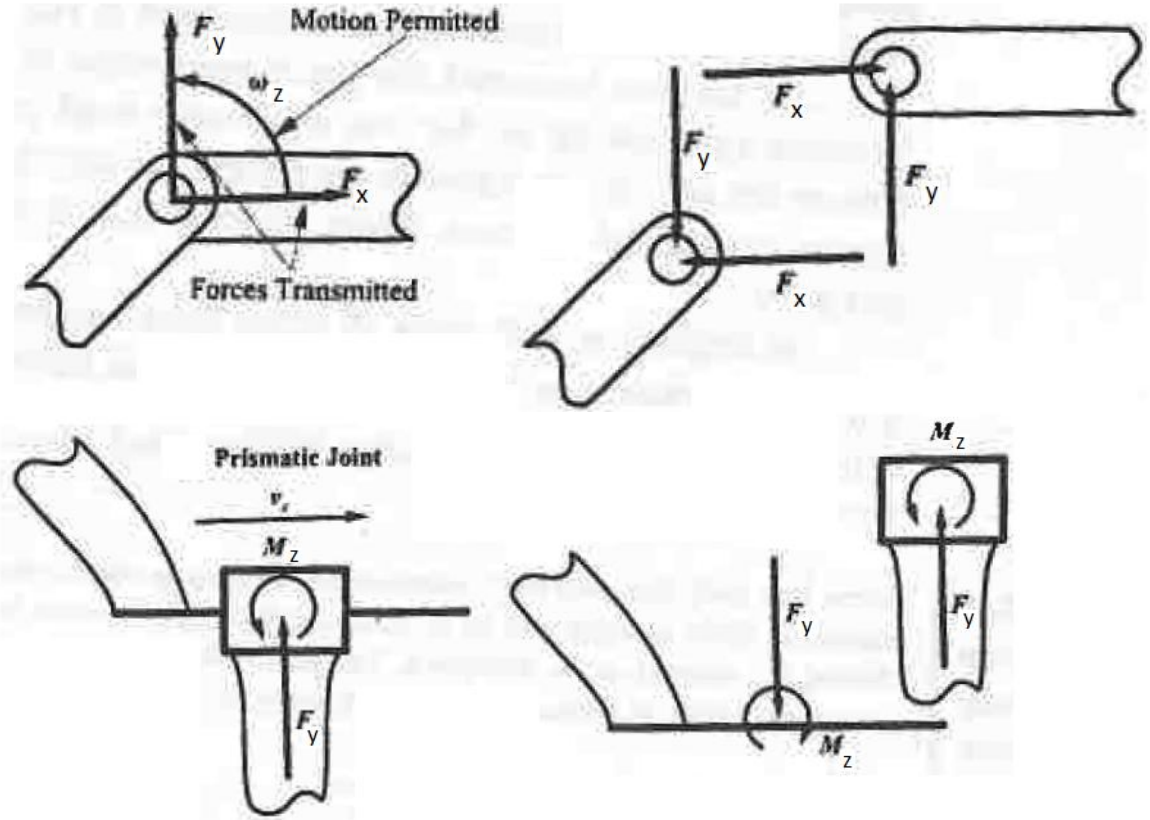
the equations of *static equilibrium*

اولین گام در حل ، رسم دیاگرام جسم آزاد free body diagram

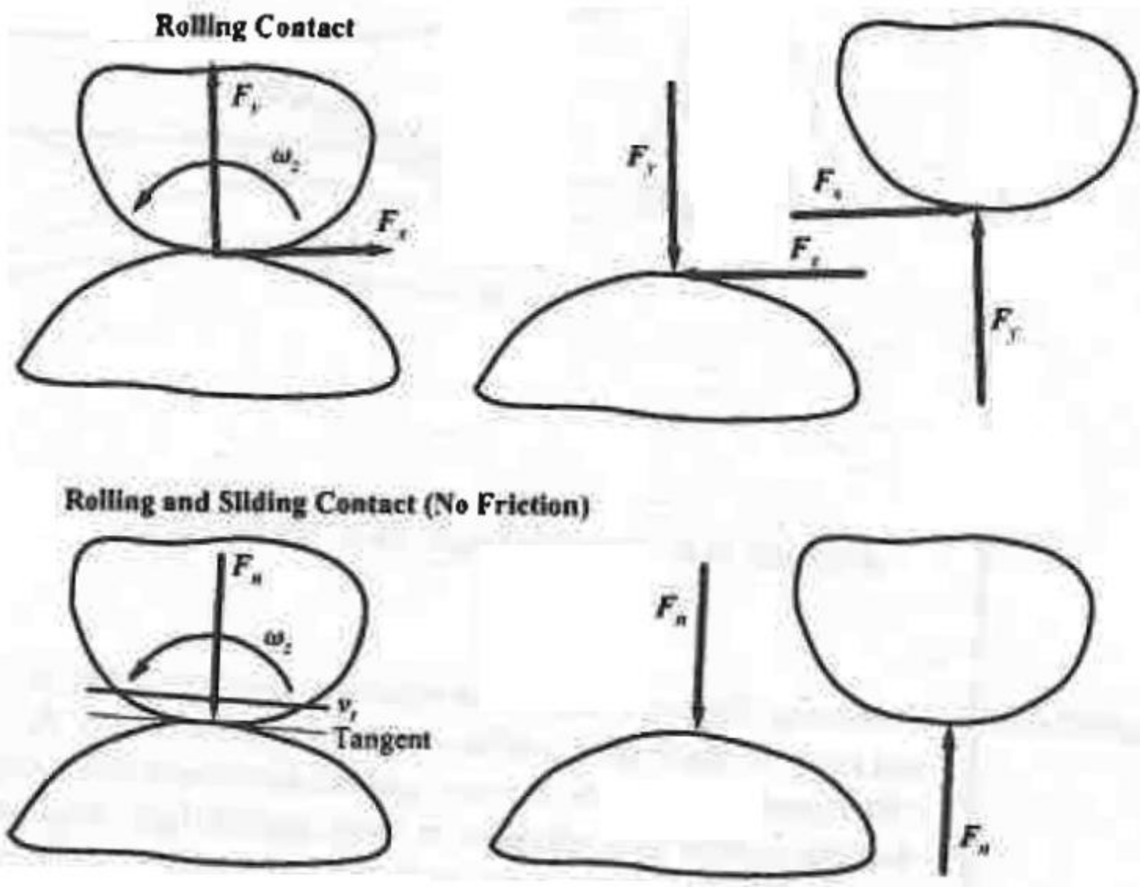
تمام بار گذاری خارجی و نیروی و گشتاورهای عکس العملی داخلی در نظر گرفته شود.

نیروهای عمل و عکس العمل در انواع اتصالات

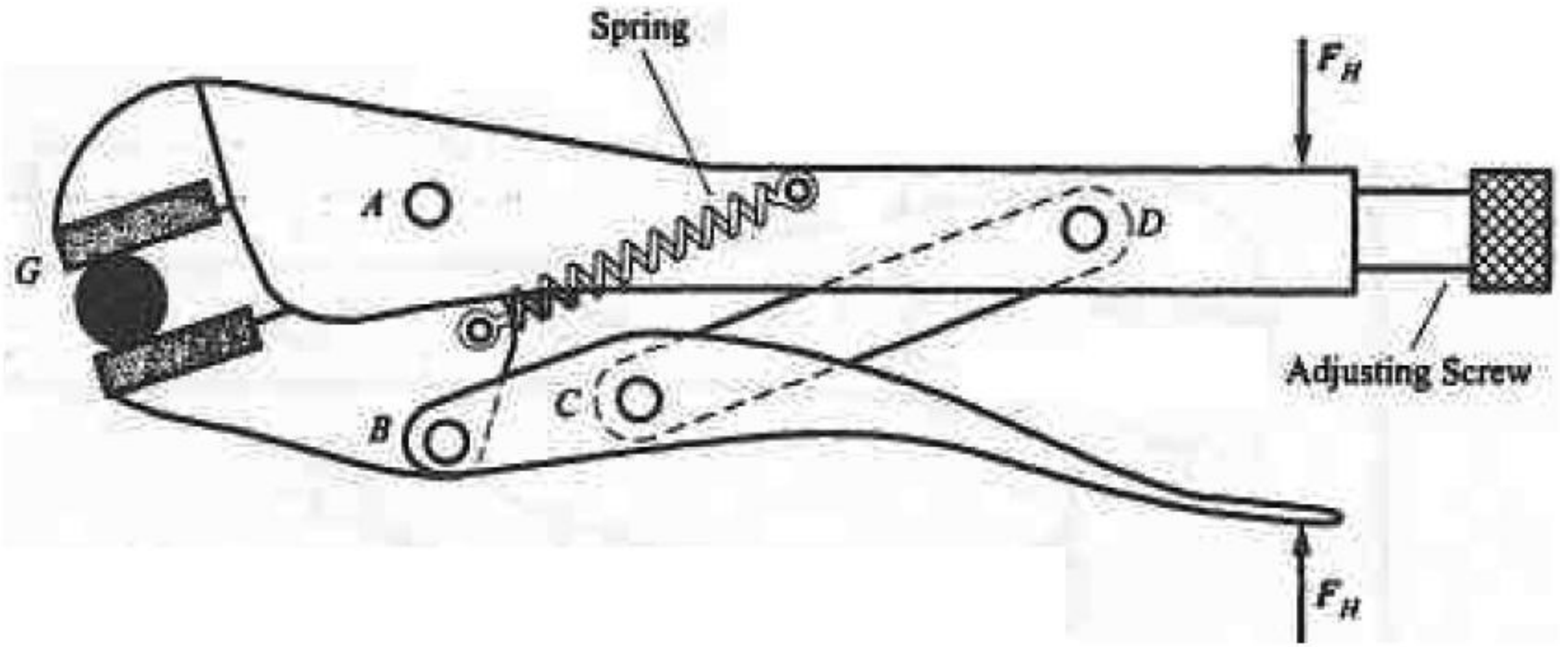
اتصال	دیاگرام جسم آزاد



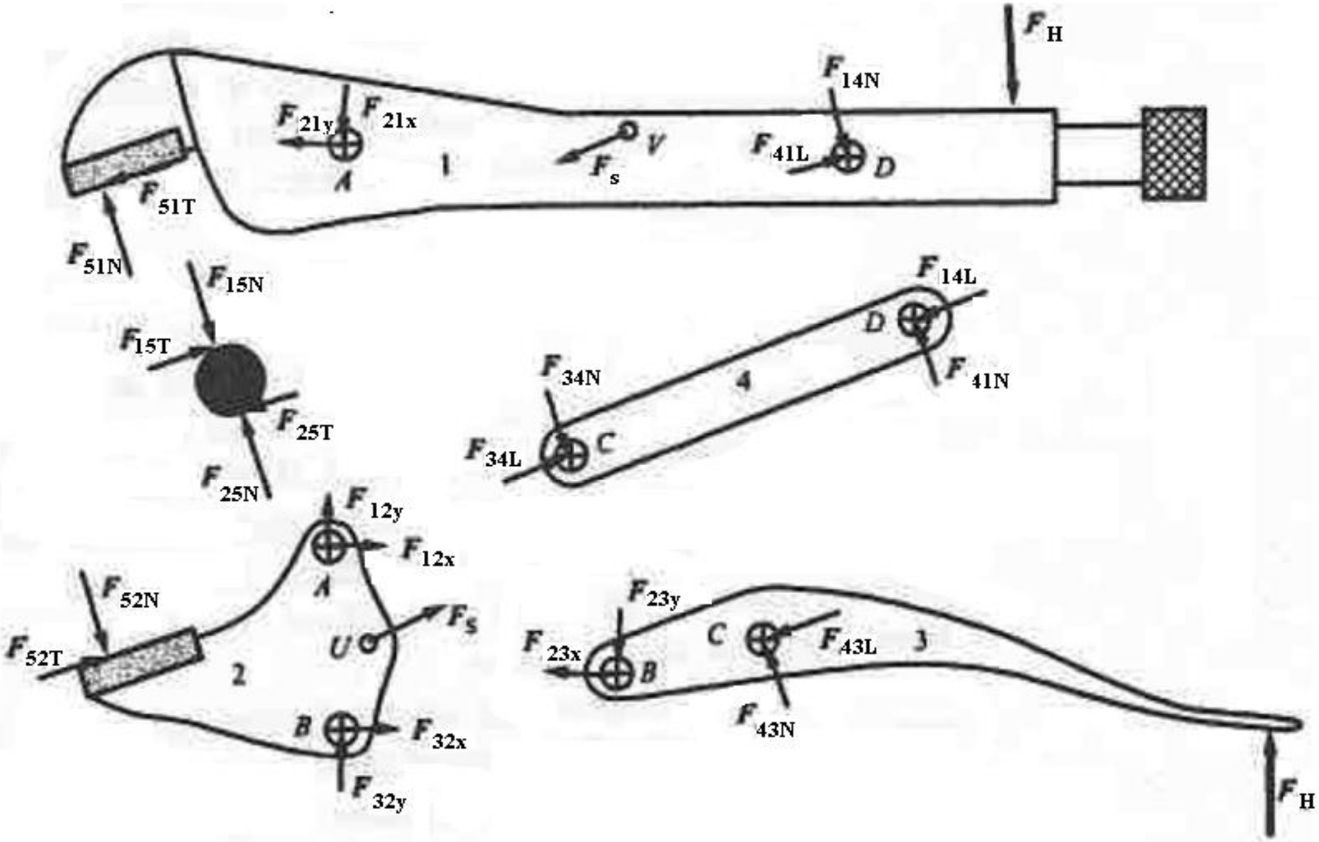
نیروهای عمل و عکس العمل در انواع اتصالات



دیاگرام جسم آزاد کلیه اعضاء مکانیزم زیر را در موقعیت نشان داده شده رسم نمایید. هدفِ تحلیل ، بدست آوردن ارتباط بین نیروی اعمالی F_H و نیروی گیرش قطعه کار F_G می باشد. از نیروی وزن صرف نظر نمایید.



ادامه دهید

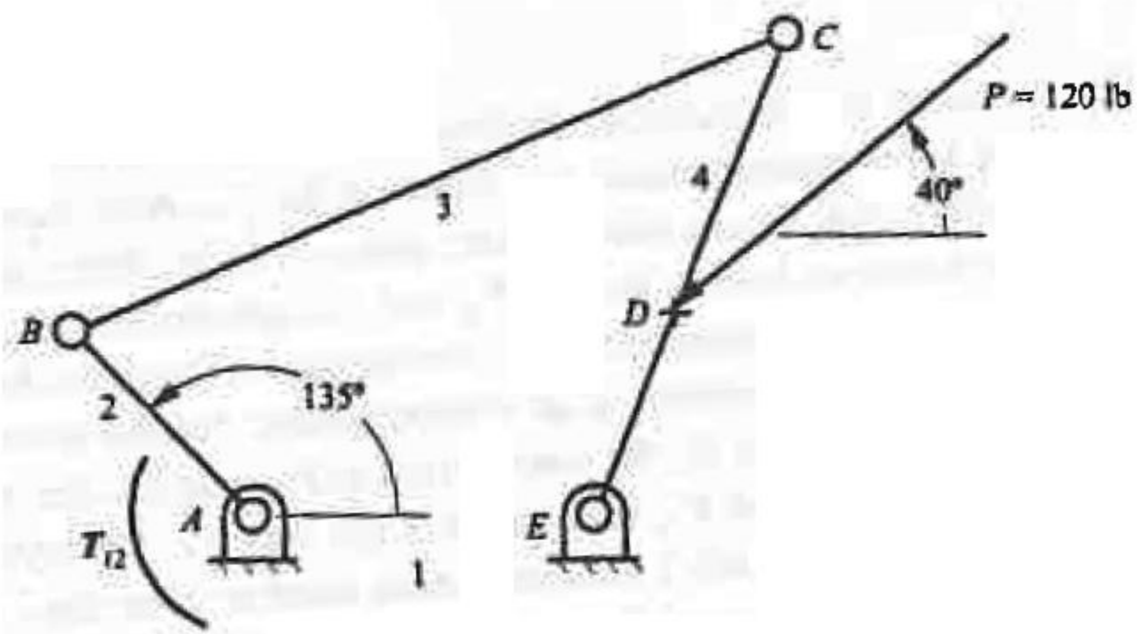


F_H
F_{14N}
F_{21y}
F_{21x}
A
1
F_s
V
F_{41L}
D
F_{51T}
F_{51N}
F_{15N}
F_{15T}
F_{25T}
F_{25N}
F_{14L}
D
F_{41N}
4
F_{34N}
F_{34L}
C
F_{12y}
F_{12x}
A
F_{52N}
F_{52T}
2
U
F_s
B
F_{32x}
F_{32y}
F_{23y}
F_{23x}
B
C
F_{43L}
3
F_{43N}
F_H

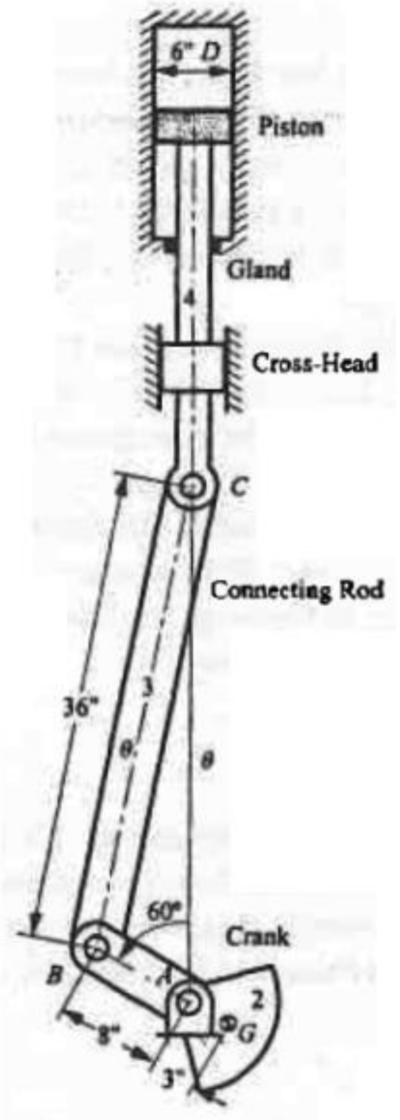
در مکانیزم زیر گشتاور T_{12} لازم برای غلبه بر نیروی $P = 120\ lb$ در جهت نشان داده شده را بدست آورید.

$AB = 6$ in, $EC = 12$ in, $AE = 8$ in

$BC = 18$ in, $ED = 5$ in



A ·pump used for pumping drilling mud in oil-well drilling has IWQ double-acting cylinders.
The linkage of the piston to the crankshaft for each cylinder is arranged as shown in Fig.



تحلیل نیروهای دینامیکی

عوامل اصلی شکست اجزاء ماشین عبارتند از: تغییر شکل یا شکست در اثر تنشهای بیش از حد ، ارتعاشات و تداخل در اثر خیز الاستیک بیش از حد.

جهت محاسبه تنشهای داخلی اجزاء و خیزهای الاستیک ابتدا باید ارتباط بین نیرو و حرکت تحلیل شوند.

قانون دوم نیوتن برای ذرات

Newton's *second law*

$$F = ma$$

اجزاء ماشین معمولا جرم گسترده ای دارند و لازم است از قانون دوم نیوتن برای اجرام صلب استفاده شود.

$$\Sigma F = m a_G$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$\Sigma M_P = I_P \alpha$$

Newton's second law are all that are needed to solve any dynamic force system by the Newtonian method.

Jean le Rond d' Alembert (1717-1783), a French mathematician, rearranged Newton's equations to create a **"quasi-static"** situation from a dynamic one.

D' Alembert's versions of equations Newton's second law:

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$$

$$\sum \mathbf{T} - I\alpha = 0$$

اکثر مسائل دینامیکی به دو گروه تقسیم بندی می شوند:

۱- حرکت (motion) هر عضو سیستم معلوم است. لذا شتاب مرکز ثقل و شتاب زاویه ای هر غضو از مکانیزم معاوم بوده یا با استفاده از سینماتیک قابل محاسبه است. بنابر این سمت راست دستگاه معادلات فوق معین بوده و حل جبری آنها جواب مسئله (نیروها و گشتاورهای لازم) خواهد بود.

۲- حرکت (motion) هر عضو سیستم از قبل معلوم نیست و لازم است که شتابها در سمت راست معادلات فوق به عنوان مشتق دوم متغیرهای موقعیت تحلیل شوند. نیروها و گشتاورهای اعمال شده روی یک عضو که در سمت چپ معادلات حرکت وجود دارند در ارتباط با متغیرهای موقعیت بوده و دستگاه معدلات دیفرانسیل بر حسب متغیرهای موقعیت و زمان بیان می شود.

مسائلی که از طریق سینیتیک ذرات قابل حل می باشند.

در برخی از مسائل اینرسی دورانی وجود ندارد یا قابل صرف نظر کردن است

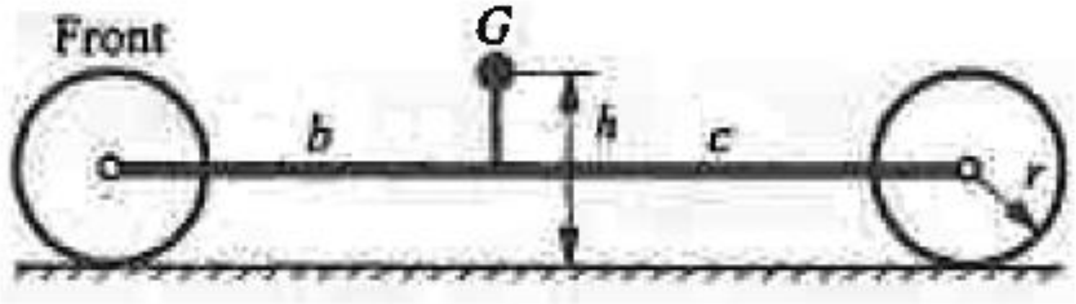
An automobile has a total weight of W = 4000 lb
distance between the front and rear axle centers b+c = 90 in,
and its center of mass is b=40in behind the front axle center.
the center of mass is h = 25in above the ground.
The wheel radius is r = 14.5 in, and on a good surface
the coefficient of friction between the tires and road is 0.8.

نسبت حداکثر شتاب اتومبیل به شتاب ثقل g را بدست آورید در صورتی که

۱- اتومبیل توسط چرخ عقب به حرکت در آید.

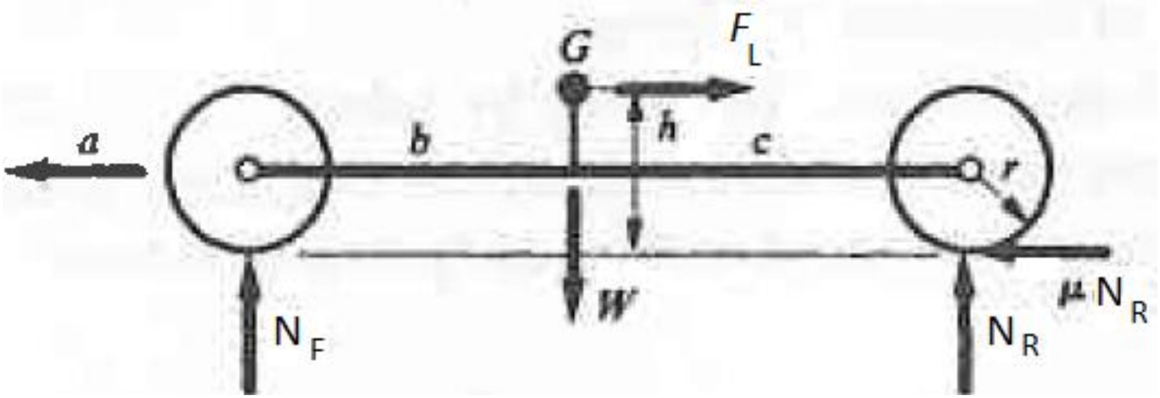
۲- اتومبیل توسط چرخ عقب به حرکت در آید.

همچنین حداکثر شتاب قابل دسترس در صورتی که نیروی ترمز بصورت بهینه بین چرخ جلو و عقب تقسیم شود را بدست آورید. درصد نیروی ترمز در روی چرخ جلو چه مقدار است.



با توجه به این که جرم سیستم به صورت متمرکز در مرکز ثقل در نظر گرفته می شود ، دیاگرام جسم آزاد به صورت زیر نشان داده می شود.

حل قسمت اول



$$F_l = \frac{Wa}{g}$$

Rear-wheel drive

$$F_L = \frac{Wa}{g}$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_l + \mu N_R = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad W = N_R + N_F$$

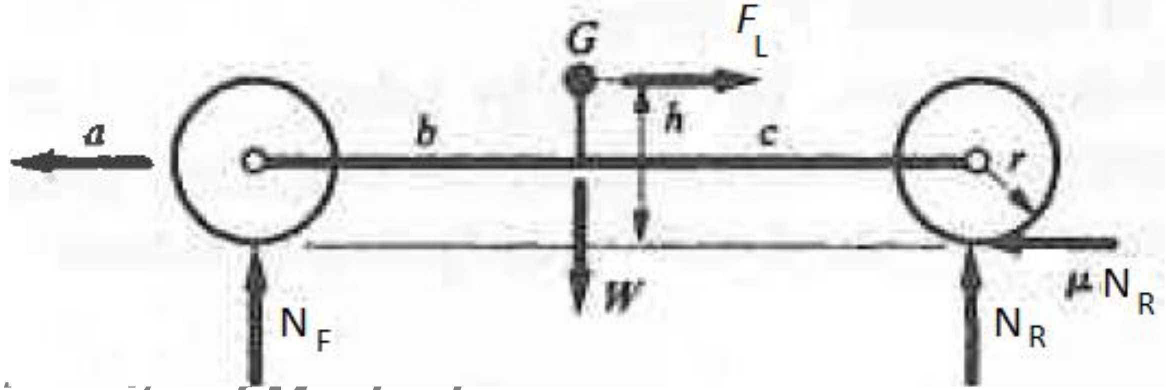
$$\sum M_G = 0 \quad cN_R = bN_F + h\mu N_R$$

$$N_R = \frac{Wa}{\mu g}$$

$$N_F = W\left(1 - \frac{a}{\mu g}\right)$$

$$\frac{a}{g}\left(\frac{b+c}{\mu} - h\right) = b$$

$$A = \frac{a}{g} = \frac{\mu b}{b + c - \mu h} \Rightarrow A = 0.457$$

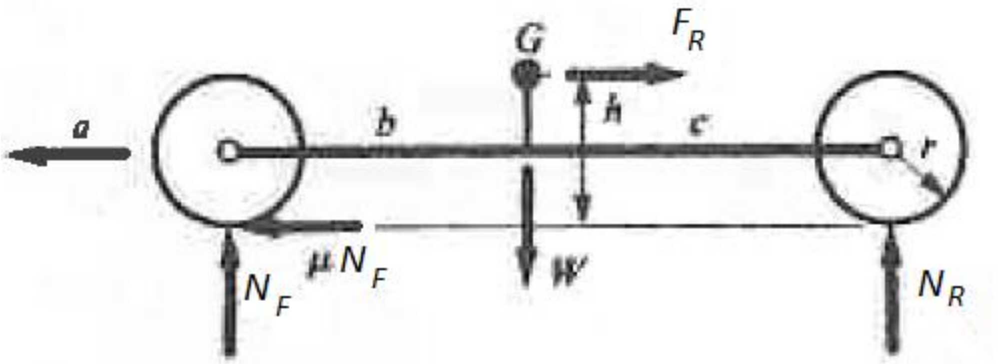


Front-wheel Drive

$$\sum F_x = 0: \quad -F_i + \mu N_F = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad W = N_R + N_F$$

$$\sum M_G = 0: \quad cN_R = bN_F + h\mu N_F$$



$$N_F = \frac{Wa}{\mu g} \qquad N_R = W\left(1 - \frac{a}{\mu g}\right)$$

$$\frac{a}{g}\left(\frac{b+c}{\mu} + h\right) = c$$

$$A = \frac{a}{g} = \frac{\mu c}{b + c + \mu h} = 0.364$$

دیاگرام جسم آزاد برای حالت ترمز

بطور بهینه دو چرخ در یک زمان به آستانه لغزش رسیده اند.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_l - \mu(N_R + N_F) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad W = N_R + N_F$$

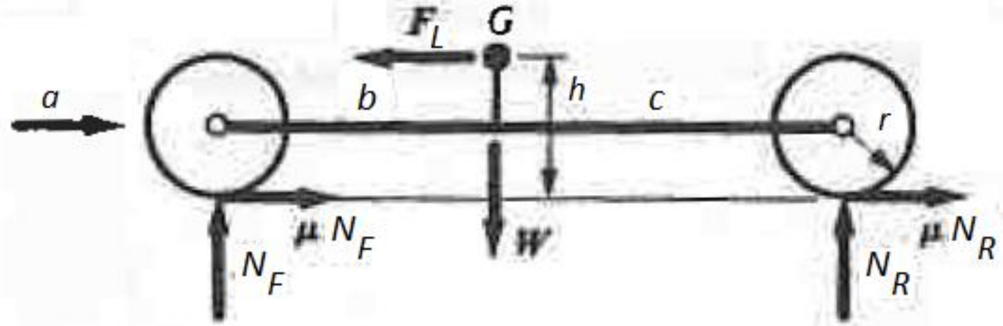
$$\sum M_G = 0: \quad cN_R + h\mu(N_R + N_F) = bN_F$$

$$\frac{Wa}{g} = \mu W$$

$$N_F(b + c) = (c + h\mu)W$$

$$N_F = W\frac{c + h\mu}{b + c}$$

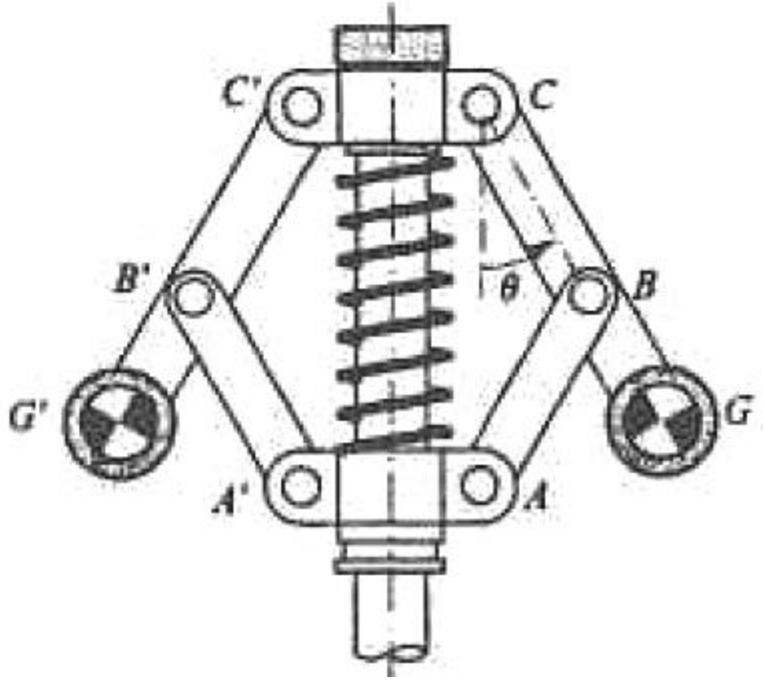
$$N_F = 0.778\,W \quad \text{and} \quad N_R = 0.222\,W$$



بنابراین ۷۷.۸% نیروی ترمز را چرخهای جلو تامین می کند

حداکثر کاهش شتاب در حالت بهینه از حداکثر شتاب افزاینده سرعت بیشتر است

گاورنر جهت تنظیم سرعت استفاده می شود. نیروی گریز از مرکز روی وزنه ها موجب فشرده شدن فنر و امکان کنترل سرعت را فراهم می کند.



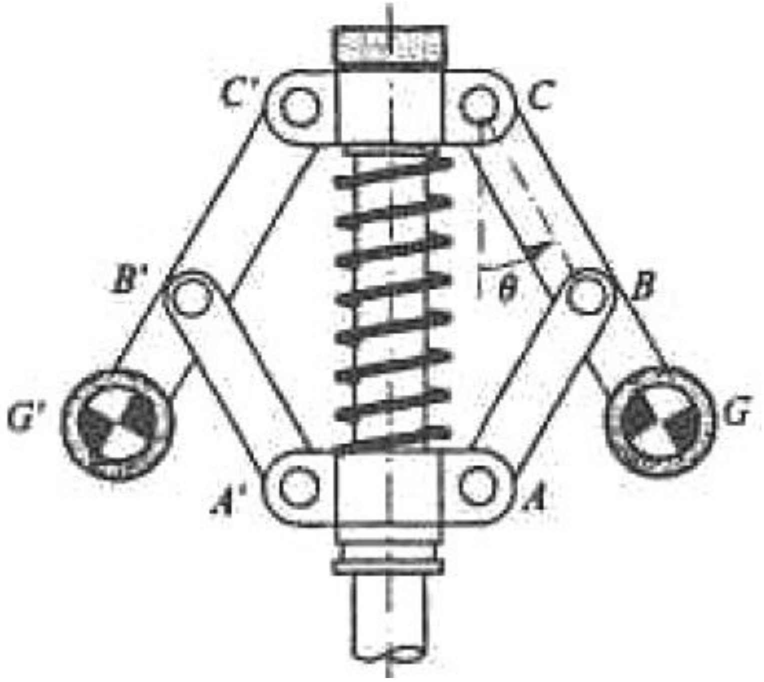
A fly-ball governor

The valve is fully closed when the angle θ is 75°. Compute the speed at which the valve is dosed if the effective centers of mass of the arms are in the locations G and *G' and other inertia can be neglected. The weight* of each arm is 0.25 lb. The adjusting nut is set So that the spring is at its natural or free length when θ=8°. The stiffness of the spring is 20 Ib/in. The lengths of the links are given.

AB = *BC =A 'B' = B'C' = 1.5* in.

CG=C'G' = 2.438 in, and CC = 1.25 in.

G and G' are center of mass

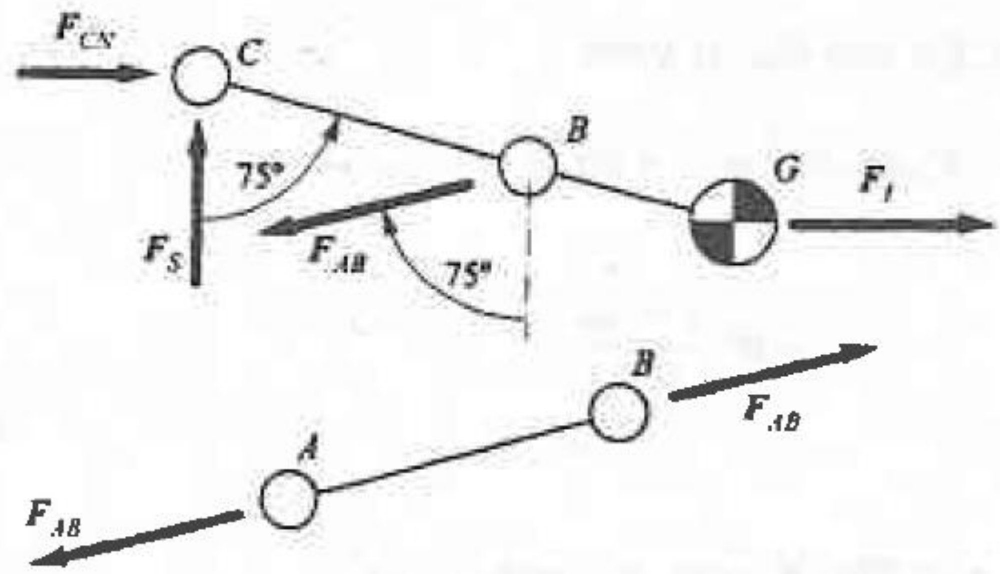


حل

$$r = 2.438\sin 75^\circ + 0.625 = 2.979 \text{ in}$$

$$a_G = r\omega^2 = (2.979/12)\omega^2 = 0.248\,\omega^2$$

$$F_I = ma_G (0.25/32.2) \times 0.248\omega^2 = 0.00193\omega^2$$



$$\sum F_x = 0: \quad F_{CN} + F_I - F_{AB}\sin 75^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_S - F_{AB}\cos 75^\circ = 0$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$AC = 2 \times 1.5\cos 75^\circ = 0.776 \text{ in}$$

$$AC = 2 \times 1.5\cos 5^\circ = 2.989 \text{ in}$$

$$x = 2.989 - 0.776 = 2.212 \text{ in}$$

$$2F_S = 20 \times 2.212 = 44.24 \text{ lb}$$

$$F_S = 22.12 \text{ lb}$$

$$F_{AB} = F_S/\cos 75° = 22.12/\cos 75° = 85.47 \text{ lb}$$

$$F_I = \frac{1.5 \sin 30°}{2.438 \sin 15°} F_{AB} = \frac{1.5 \sin 30°}{2.438 \sin 15°} 85.47 = 101.58 \text{ lb}$$

$$\omega^2 = F_I/0.00193 = 101.58/0.00193$$

$$\omega = 2191 \text{ rpm}$$

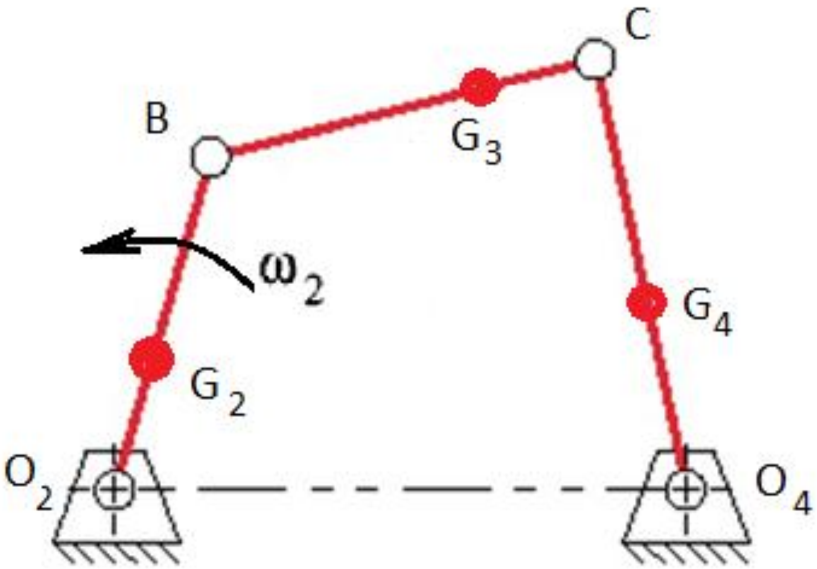
speed at which the governor will close the valve

تحلیل نیروئی مکانیزمها – روش ترسیمی

ورودی سرعت زاویه ای $\omega 2$ که ثابت می باشد.

جرمها و موقعیت مراکز ثقل داده شده اند.

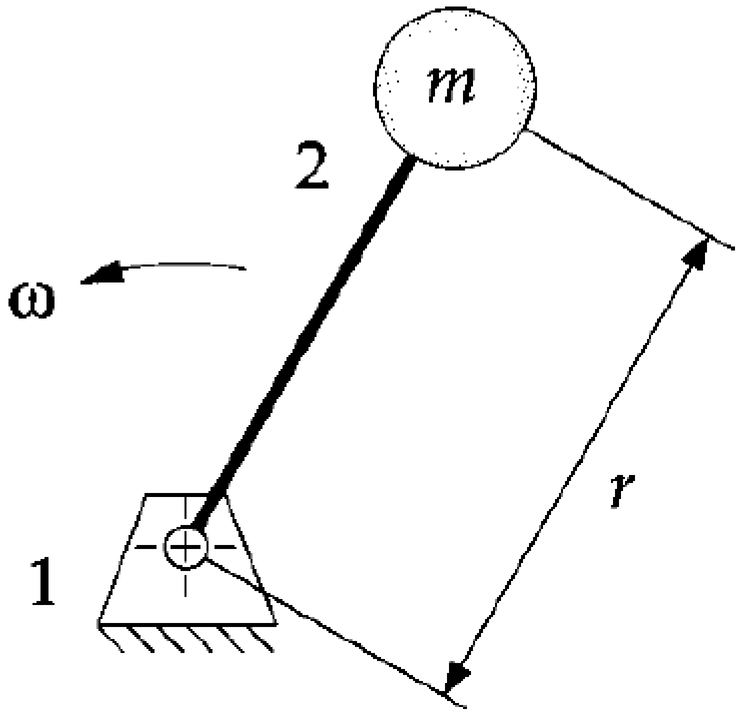
گشتاور لازم روی پین ۲ که حرکت مورد نظر را ایجاد می کنند ، بدست آورید.



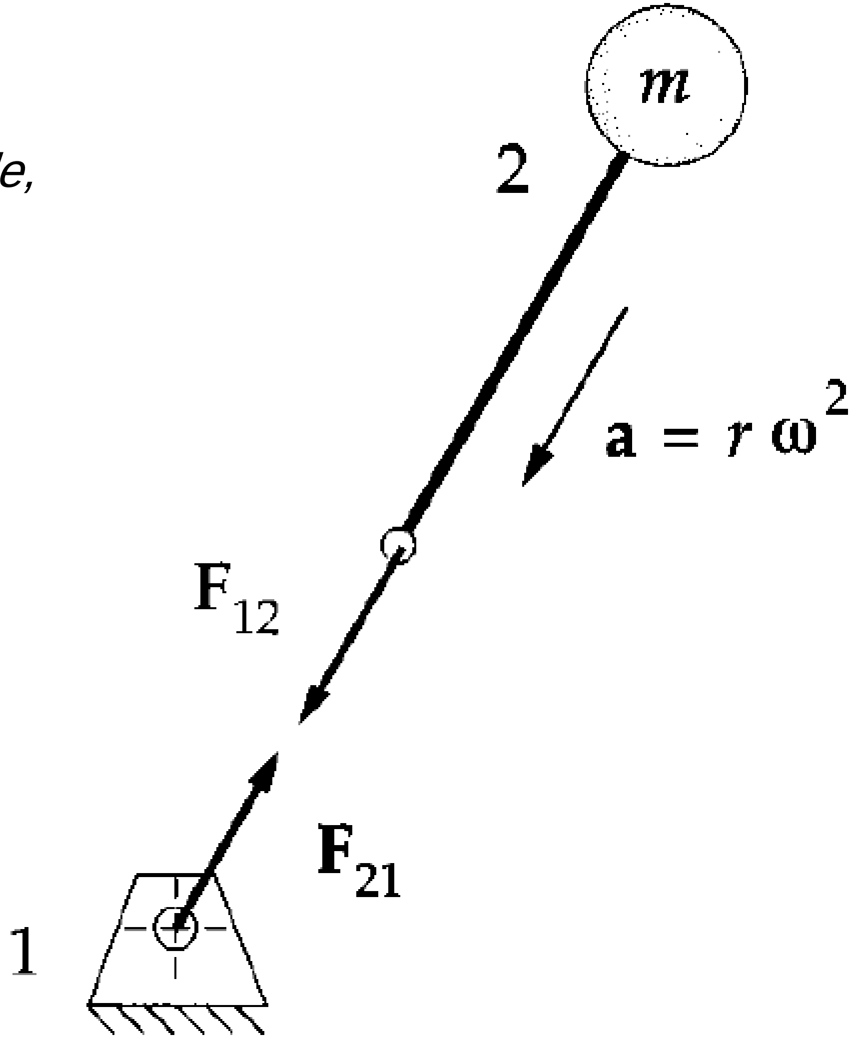
تحلیل نیروئی مکانیزمها – روش معادلات

بازو با دوران خالص

a mass, being rotated at the end of link at a constant angular velocity ω and constant radius r.



"pure" free-body diagrams of both members in this system,
the ground link (1) the rotating link (2).
The only real force acting on link 2 is *F12.*
angular acceleration α *is zero in this example,*
the acceleration acting on the
link is only the $r\omega^2$ *component,*
which is a ***centripetal acceleration,***
i.e., directed toward *the center.*



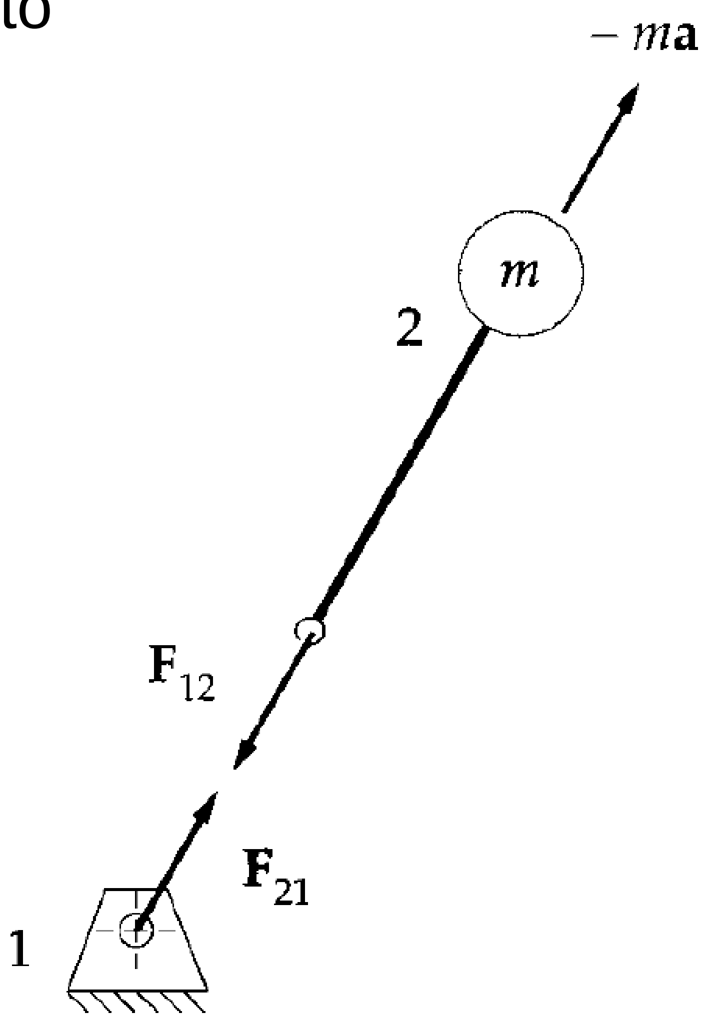
$$F_{12} = mr\omega^2$$

free-body diagrams done according to the principle of d' Alembert

a negative ***ma*** inertia force applied to the mass on link 2

$$F_{12} - mr\omega^2 = 0$$

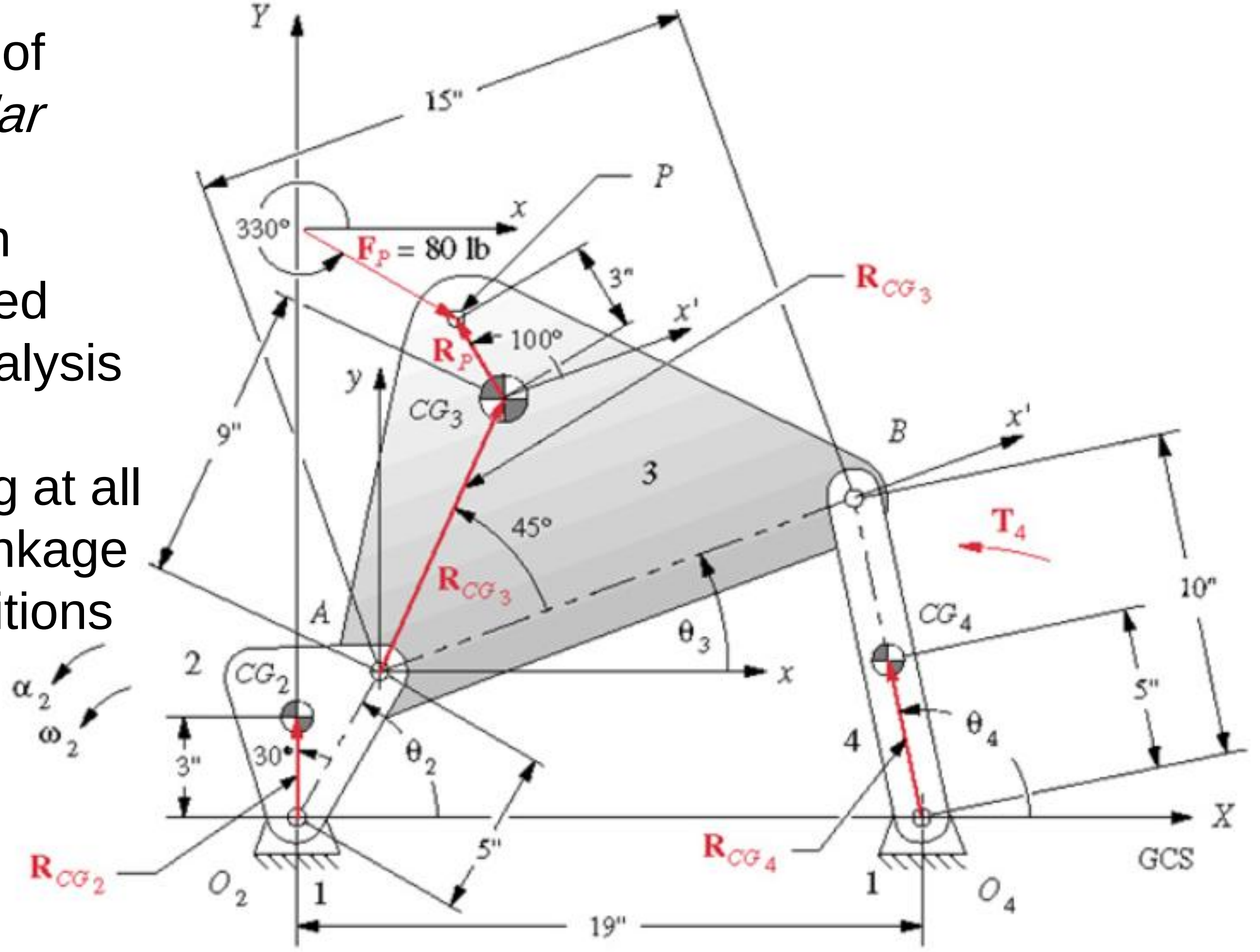
$$F_{12} = mr\omega^2$$



FORCE ANALYSIS OF A FOURBAR LINKAGE

linear accelerations of *CGs, and link angular accelerations* and velocities have been previously determined from a kinematic analysis

find the forces acting at all the pin joint of the linkage for one or more positions



Linkage has three moving links

three equations for any link or rigid body in motion

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum T = I_G\alpha$$

expect to have **nine equations in nine unknowns** for this problem

An external force $\mathbf{F}_p$ *is shown acting on link 3 at point P. Also an external torque* $\boldsymbol{T_4}$ is shown acting on link 4.

To solve for the pin forces it is necessary that these applied external forces and torques be defined for all positions of interest

The linkage kinematic parameters are defined with respect to **a global *XY system*** **(GCS)** whose origin is at the driver pivot 0_2 and whose X axis goes through link 4's fixed pivot 0_4.

The CG of each link is initially defined within each link with respect to a local moving and rotating axis system (LRCS) embedded in the link because the CG is an unchanging physical property of the link.

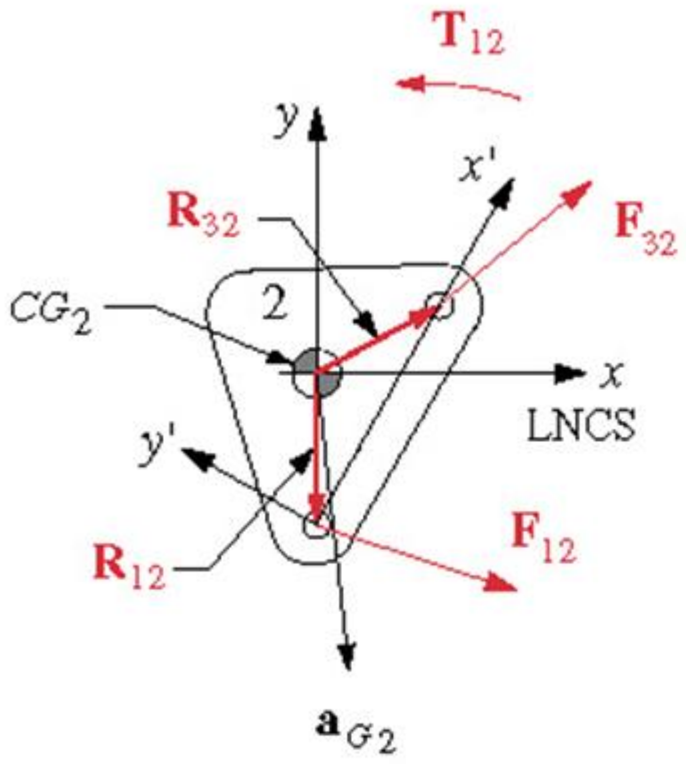
We need to define each link's dynamic parameters and force locations with respect to a local, moving, but nonrotating axis system (LNCS) *x,y located at its CG as shown* on each free-body diagram

link 2

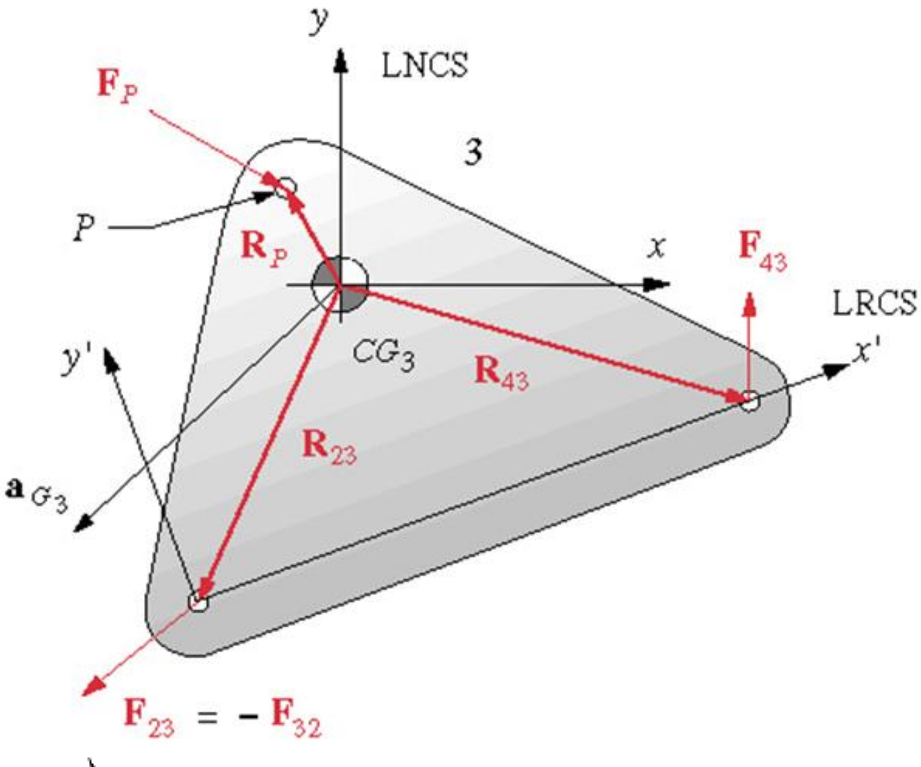
$$F_{12_x} + F_{32_x} = m_2 a_{G_{2x}}$$

$$F_{12_y} + F_{32_y} = m_2 a_{G_{2y}}$$

$$T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x} \right) + \left(R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x} \right) = I_{G_2} \alpha_2$$



link 3



$$F_{43_x} - F_{32_x} + F_{P_x} = m_3 a_{G_{3_x}}$$

$$F_{43_y} - F_{32_y} + F_{P_y} = m_3 a_{G_{3_y}}$$

$$\left(R_{43_x} F_{43_y} - R_{43_y} F_{43_x}\right) - \left(R_{23_x} F_{32_y} - R_{23_y} F_{32_x}\right) +$$

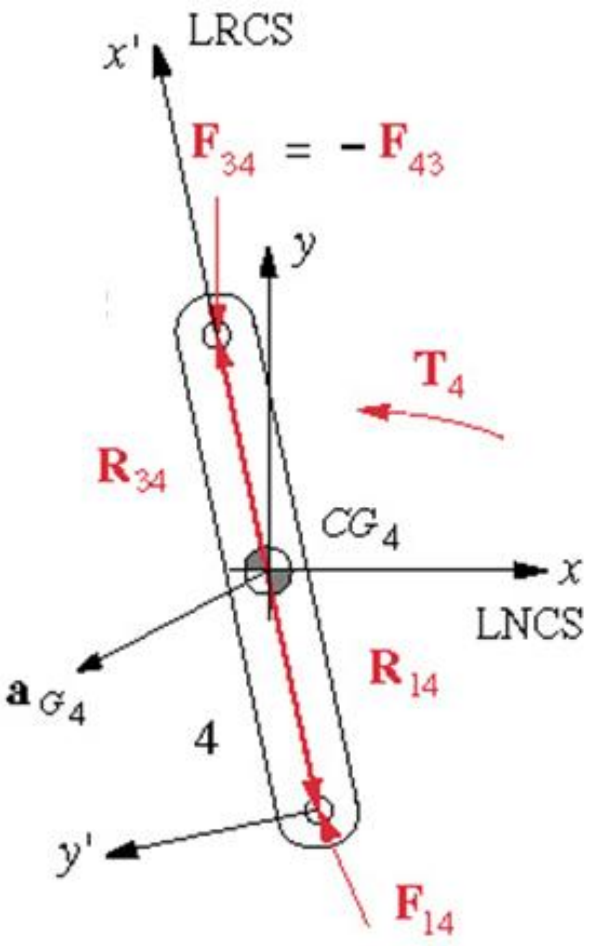
$$\left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) = I_{G_3} \alpha_3$$

Link 4

$$F_{14_x} - F_{43_x} = m_4 a_{G_{4x}}$$

$$F_{14_y} - F_{43_y} = m_4 a_{G_{4y}}$$

$$\left(R_{14_x} F_{14_y} - R_{14_y} F_{14_x}\right) -$$
$$\left(R_{34_x} F_{43_y} - R_{34_y} F_{43_x}\right) + T_4 = I_{G_4} \alpha_4$$



There are nine unknowns present in these nine equations,

F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, and T_{12}

so we can solve them simultaneously.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & -R_{32_y} & R_{32_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23_y} & -R_{23_x} & -R_{43_y} & R_{43_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34_y} & -R_{34_x} & -R_{14_y} & R_{14_x} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_x} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G_{2x}} \\ m_2 a_{G_{2y}} \\ I_{G_2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G_{3x}} - F_{P_x} \\ m_3 a_{G_{3y}} - F_{P_y} \\ I_{G_3}\alpha_3 - R_{P_x} F_{P_y} + R_{P_y} F_{P_x} \\ m_4 a_{G_{4x}} \\ m_4 a_{G_{4y}} \\ I_{G_4}\alpha_4 - T_4 \end{bmatrix}$$

به جزوه برداشته شده در کلاس مراجعه شود